

Flere veje ind i matematikken med online visuelle hjælpemidler

Afprøv, undersøg og diskutér, hvordan og hvorfor online hjælpemidler kan støtte elever i matematikvanskeligheder – og hvad læreren skal gøre, for at matematikken bliver synlig.

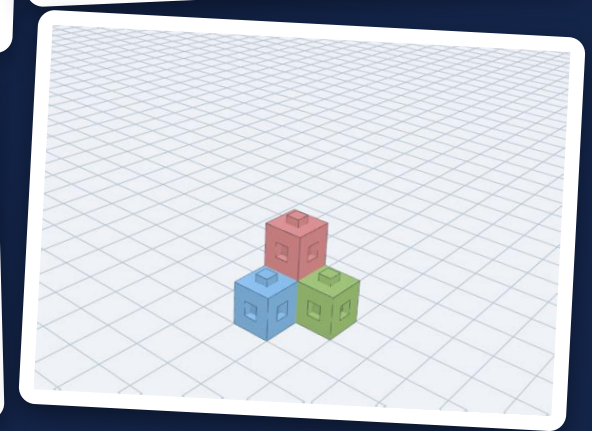
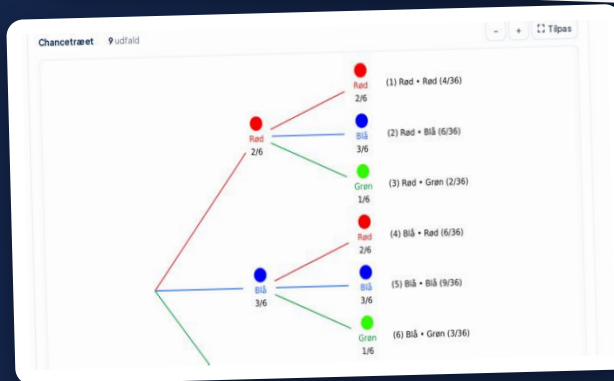
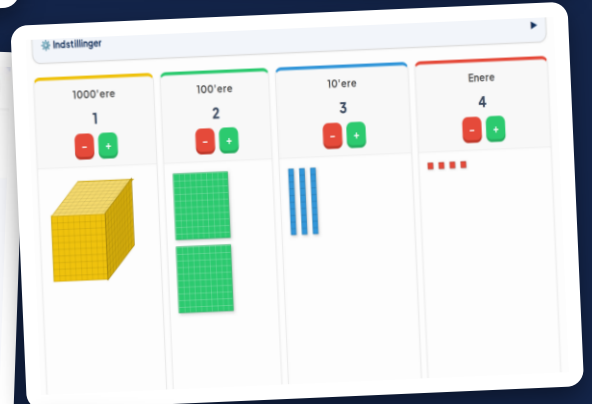
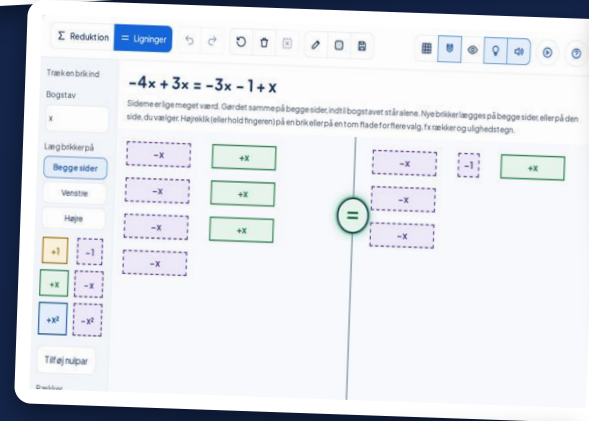
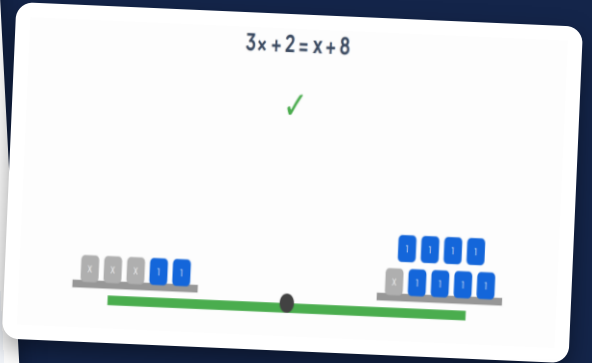
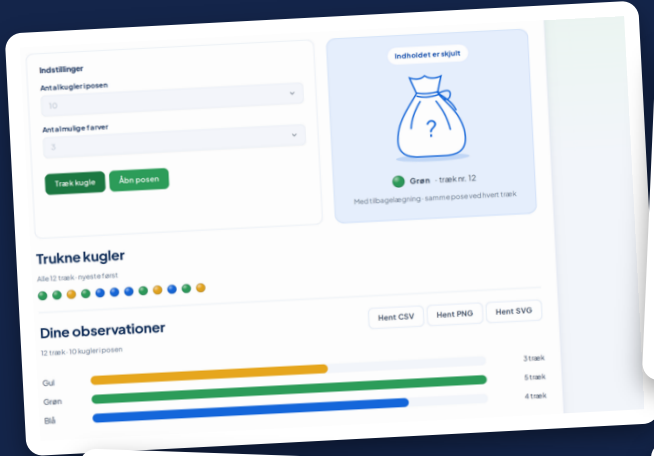
SANDSYNLIGHED

ALGEBRA

GEOMETRI

TAL

Troels Gannerup Christensen
matematikopgaver.dk · Lærevejen ApS



Gå i gang med det samme

Vi starter med at prøve – forskningen og fællesgørelsen kommer til sidst.



1. Find en makker

I arbejder 2 og 2 med én computer eller tablet – og gerne papir og blyant ved siden af.



2. Fordel rollerne

Den ene betjener hjælpemidlet. Den anden læser opgaven, stiller spørgsmål og noterer. Byt ved hvert nyt nummer.



3. Start med Aktivitet 1

Åbn hjælpemidlerne via QR-koden eller links på aktivitetssiden. Derefter vælger I selv mellem aktivitet 2–9.



4. Noter til fællesgørelsen

Hver aktivitet slutter med et spørgsmål »Til fællesgørelsen«. Skriv jeres overvejelser ned – vi samler op til sidst.

Alle hjælpemidler



matematikopgaver.dk/hjaelpemidler

Hver aktivitet har sin egen QR-kode og direkte links til de hjælpemidler, I skal bruge.

Spørgsmålet I tager med:

Kan det noget? Hvad, hvordan og hvorfor?

Program



Hvad får I med?

Aktiviteter

Konkrete opgaver, I kan bruge direkte i undervisningen.

Hjælpemidler

Gratis online visuelle hjælpemidler med links og QR-koder.

Forskningsblik

Hvad virker – og hvad skal man være opmærksom på?



Scan: Kugler i posen

Hvor mange blå kugler er der i posen?

En pose med 10 kugler i tre farver. I må kun trække én kugle ad gangen og lægge den tilbage. Hvor mange er blå? Undersøg med data, chancetræ, simulering og beregning.



MATEMATISK POINTE

Den statistiske sandsynlighed (hyppigheden) nærmer sig den teoretiske, når antallet af træk vokser – men små stikprøver svinger meget. Vi kan slutte fra data til posens indhold, men kun med usikkerhed.



HJÆLPEMIDLER

[Kugler i posen](#)

[Chancetræ](#)

[Simulering 1: Antal røde](#)

[Sandsynlighedsberegner](#)

Fysisk: en pose med 10 kugler eller centicubes i 3 farver



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- Generelt: Simuleringsværktøjer hjalp elever med at forbinde statistisk og teoretisk sandsynlighed og se værdien af store stikprøver – i samspil med opgaver og samtale (Stohl & Tarr, 2002).
- **Matematikvanskeligheder:** Teknologibaserede forløb gav mest øvelse og feedback – få viste og forklarede selve matematikken. Det er lærerens opgave (Kiru m.fl., 2018).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Åbn **Kugler i posen**. Vælg 10 kugler og 3 farver. Træk 10 gange. Skriv hver jeres bud på antallet af blå kugler som brøk, fx 3/10. ⇄ *handling* → *søjler* → *brøk*

2

Træk 20 gange mere (30 i alt). Ændrer I budet? Skriv andelen af blå som brøk, decimaltal og procent. Hvad skal der til for at overbevise jer? ⇄ *diagram* → *brøk, decimal, procent*

3

Før I åbner posen: Byg et **chancetræ** over **2 træk** ud fra jeres bud (Samme forsøg gentages, med tilbagelægning). Hvad er chancen for to blå i træk? Åbn posen og sammenlign. ⇄ *data* → *chancetræ* → *brøk*

4

Simulering 1 (lad »røde« være blå): $N = 10$, $K =$ jeres bud, $n = 10$, $M = 1$, med tilbagelægning. Hvor ofte får I lige så mange blå som i opgave 1? Prøv K én højere og én lavere. Hvilket K passer bedst? ⇄ *simulering* → *fordeling*

5

Sæt $M = 10.000$. Hvad sker der med søjlerne? Sammenlign kolonnen Frekvens $f(x)$ med Teoretisk $P(X = x)$ i tabellen. ⇄ *diagram* → *tabel*

6

Ekstra: Brug **Sandsynlighedsberegneren** (binomialfordeling) med $n = 10$, $p = 0,2$ og netop $r = 0$. Hvor stor er chancen for 0 blå på 10 træk, selvom 2 af kuglerne er blå? ⇄ *formel* → *tal*



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvornår hjalp værktøjet jer til at tænke – og hvornår tænkte det for jer? Hvilke ord og spørgsmål har en elev i matematikvanskeligheder brug for i opgave 1–2?



Scan: Ligningsvippen #1

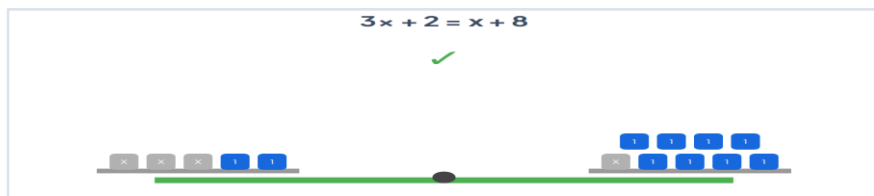
Ligninger: fra vippe og fliser til symboler

Byg den samme ligning i tre modeller: en vippe, algebrafliser og symboler. Undersøg, hvad der sker med ligevægten, når I gør det samme på begge sider – og hvornår modellen driller.



MATEMATISK POINTE

En ligning udtrykker ligevægt: To udtryk har samme værdi. Gør man det samme på begge sider, bevares løsningen. Vippen gør princippet synligt, men negative tal "kræver" en anden model, fx fliser med nulpar.



HJÆLPEMIDLER

[Ligningsvippen #1 \(naturlige tal\)](#)

[Ligningsvippen #2 \(heltal\)](#)

[Ligningsvippen #3 \(træk og slip\)](#)

[Algebrafliser](#)

[Ligningsløser](#)



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Matematikvanskeligheder:** En virtuel vippe kombineret med eksplicit undervisning øgede præcision og selvstændighed i ligninger med flere trin (Satsangi, Hammer & Hogan, 2018).
- **Generelt:** Den virtuelle vægt viste ligningen samtidig med modellen og gav feedback – det styrkede koblingen mellem billede og symbol (Suh & Moyer, 2007).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Åbn **Ligningsvippen #1**: Byg $3x + 2 = x + 8$ med knapperne +X og +1 på hver side. Ændr »Værdi af X« nederst under Nulstil, indtil vippen er i balance. Hvilken værdi har x? ⇄ *vippe* → *symbol*

2

Tag nu det samme væk fra begge sider (−X og −1), indtil kun x'erne er tilbage på venstre side. Skriv hvert trin som en ligning under hinanden. Hvorfor er vippen stadig i balance? ⇄ *handling* → *symbolske trin*

3

Åbn **Ligningsvippen #2**: Byg $2x - 3 = x + 1$ og find x. Hvordan viser vippen −3? Giver det mening, at noget »vejer negativt«? ⇄ *vippe* → *sprog*

4

Åbn **Algebrafliser** (vælg Ligninger): Byg $2x - 3 = x + 1$ med fliser. Løs den ved at fjerne ens brikker og lægge nulpar på begge sider. Hvornår bliver lighedstegnet rødt? ⇄ *symbol* → *fliser* → *symbol*

5

Lav ligninger til hinanden: Den ene bygger en ligning på **Ligningsvippen #3** eller med algebrafliser. Den anden skriver den med symboler, løser den på papir og tjekker i Ligningsløseren (Tjek min løsning). Byt roller. ⇄ *model* → *symbol* → *papir* → *tjek*

6

Skriv en lille historie, der passer til én af jeres ligninger. Hvilken model passer bedst til historien – vippen eller fliserne? ⇄ *symbol* → *hverdagssprog*



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvornår er vippen en hjælp – og hvornår er den en forhindring? Hvad skal eleven sige højt, for at handlingen på skærmen bliver til matematik?



Scan: Centicubes 3D

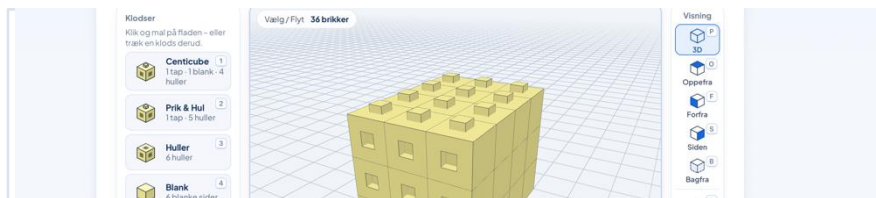
Centicubes: fra fysisk figur til 3D, 2D og tal

Byg med fysiske og digitale centicubes, og stil hinanden opgaver. Skift mellem figur, beskrivelse, tegninger set fra forskellige sider og regneudtryk.



MATEMATISK POINTE

En 3D-figur kan beskrives med ord, med 2D-tegninger (forfra, fra siden, oppefra) og med tal. Rumfang kan tælles struktureret i rækker og lag (l · b · h) i stedet for én og én.



HJÆLPEMIDLER

[Centicubes 3D](#)

[Centicubes \(2D\)](#)

Fysisk: centicubes, en skærm (eller fx en bog) og ternet papir



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Generelt:** Et virtuelt byggeværktøj til prismer hjalp elever i 3.–4. klasse fra at tælle enkelte terninger til at strukturere i rækker, lag og kantlængder (O'Dell m.fl., 2017).
- **Matematikvanskeligheder:** Virtuelle og fysiske materialer var lige effektive (Peltier m.fl., 2020), men i ét studie gav fysiske materialer lidt bedre resultater for to af tre elever (Satsangi m.fl., 2016).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt evt. roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Byg bag en skærm en figur med 6 fysiske centicubes. Beskriv den med ord, så makkeren kan bygge den i **Centicubes 3D** uden at se den. Sammenlign. Hvilke ord var nødvendige? ⇄ *fysisk* → *sprog* → *digital 3D*

2

I **Centicubes 3D**: Byg hver en ny digital figur med 8 centicubes (begræns med farver) og se visningen oppefra, forfra og fra siden (Vælg visningen i Visning). Tegn de tre visninger over på papir (det ligger i lokalet). Overvej G for gul, R for rød, Gr for grøn osv. ⇄ *3D* → *2D*

3

Byt: Giv makkeren kun jeres tre tegninger. Kan figuren bygges? Findes der flere mulige figurer? Hvad er det mindste og største antal klodser, der passer til tegningerne? ⇄ *2D* → *3D*

4

Byg en kasse på $4 \times 3 \times 3$ (digitalt eller fysisk). Hvor mange klodser er der? Forklar med et regneudtryk uden at tælle én og én. Hvor mange klodser er helt skjult inde i kassen? ⇄ *3D* → *regneudtryk*

5

Centicubes (2D): Vis tallet 12 som så mange forskellige rektangler som muligt. Byg derefter 12 som kasser i 3D. Hvilke regneudtryk hører til? (fx $1 \cdot 12$, ...) ⇄ *tal* → *areal* → *rumfang*



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvad kan de fysiske klodser, som de digitale ikke kan – og omvendt? Hvornår vil I bruge dem sammen med en elev i matematikvanskeligheder?



Scan: Positionsbrikker

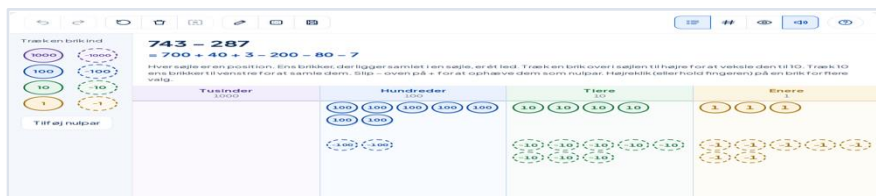
Positionssystemet: veksling, strategier og rationale tal

Regn med positionsbrikker, veksl i andre talsystemer, og se det samme rationale tal som brøk, decimaltal, procent, areal og punkt på en tallinje.



MATEMATISK POINTE

Positionssystemet bygger på grupper af 10: 10 enere = 1 tier, 10 tiere = 1 hundrede. Mønstret fortsætter til højre for kommaet (1 = 10 tiendedele). Veksling og nulpar gør regnestrategier synlige.



HJÆLPEMIDLER

[Positionsbrikker](#)
[Positionssystemer](#)
[Rationale tal](#)
[Simple tallinjer](#)



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Matematikvanskeligheder:** Et forløb med virtuelle titalsklodser, tegninger og symbolske beregninger (VRA) understøttede elever med **intellektuelle og udviklingsmæssige funktionsnedsættelser** i arbejdet med subtraktion med veksling (Bouck m.fl., 2024).
- Et online VRA-forløb med virtuelle materialer, visuelle repræsentationer og symbolske beregninger understøttede elever i matematikvanskeligheder i arbejdet med tocifret subtraktion med veksling (Bouck, Long & Jakubow, 2021).
- Generelt: Med virtuelle brøkværktøjer betød baggrundsfaktorer som sprog og socioøkonomi mindre for elevernes resultater (Møyer-Packenham m.fl., 2014).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Positionsbrikker: Anvend $743 - 287$. Løs opgaven på to måder: a) veksl først, b) ophæv nulpar først. Følg Udregning. Hvilken måde ligner jeres egen strategi på papir? ⇄ **brikker** → **udvidet notation**

2

Brug Tilføj nulpar til at vise, at $743 - 287 = 756 - 300$. Tegn begge regnestykker på en tom tallinje. Hvorfor er afstanden den samme? Forklar hinanden, hvorfor det er sådan? ⇄ **brikker** → **tallinje**

3

Åbn **Positionssystemer**: Vælg base 5, og tæl op med + ved enerne. Hvad sker der efter 4? Hvordan skrives vores 13 i base 5? Prøv at regne $123 \text{ (base 5)} + 23 \text{ (base 5)}$. Hvordan føles det at veksle uden automatik? ⇄ **handling** → **symbol**

4

Åbn **Rationale tal**: Indtast $3/8$. Vælg tre repræsentationer (fx brøkstang, 100-tavle, tallinje, decimaltavle). Hvilken viser bedst, at $3/8 = 0,375$? Forklar for makkeren. Lav nyt rationalt tal og forklar én af repræsentationerne og få makkeren til at lave en anden repræsentation, der viser samme tal. Hvordan kan I se, at de viser det samme? Udvælg 2 værdier på tallinjen og placér hhv. en brøk, procenttal og decimaltal mellem de 2. ⇄ **brøk** → **areal** → **tallinje** → **decimal**

5

Vælg **Flere tal & sortering** i fanerne: Indtast og gæt først rækkefølgen af **0,45 og 4/9 og 46 % og 5/11 og 0,44 og 9/20**. Tjek derefter på den fælles tallinje. Hvilke(t) tal skabte diskussion? ⇄ **symbol** → **tallinje**



TIL FÆLLESGØRELSEN

Klodser viser størrelse (proportional model), brikker viser værdien med tal (ikke-proportional model). Hvilken vil I vælge først til en elev i vanskeligheder – og hvorfor?



Scan: Simple tallinjer

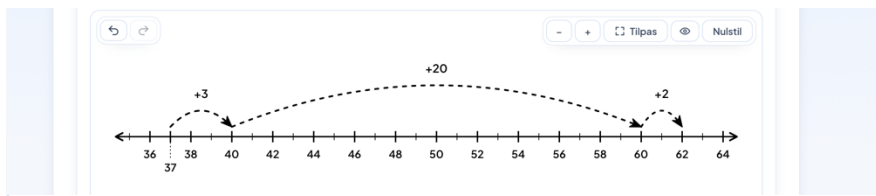
Tallinjen: regnestrategier, man kan se

Brug den tomme tallinje til at vise, hvordan man regner – ikke kun hvad resultatet er. Sammenlign strategier for addition og subtraktion, og lad buerne vise tænkningen.



MATEMATISK POINTE

Tallinjen viser tal som placeringer og afstande. Buerne gør regnestrategier synlige: hop til hele tiere, del tal op, kompensér. Subtraktion er både at tage væk og afstanden mellem to tal.



HJÆLPEMIDLER

[Simple tallinjer](#)

[Tallinjer \(avancerede\)](#)

Fysisk: tom tallinje på papir eller malertape på gulvet



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Matematikvanskeligheder:** Et computerbaseret tallinjespil (15 min dagligt i 5 uger) forbedrede talforståelse og regning hos børn med dyskalkuli – og hos kontrolgruppen (Kucian m.fl., 2011).
- **Matematikvanskeligheder:** Læreren skal eksplicit koble modellen til regnetegn og bede eleven sætte ord på og begrunde sin repræsentation (Shin m.fl., 2017).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Simple tallinjer: Vælg visningen Kun valgte tal. Vis $38 + 26$ på to måder med buer (Indtast bue): A) mindste tal først, B) største tal først. Skriv hver strategi som en regnekæde. ⇄ **buer** → **regnekæde**

2

Vis $83 - 47$ på to måder: som at tage væk (hop baglæns fra 83) og som afstand (hop fra 47 op til 83). Hvilken strategi er lettest her – og hvorfor? Hvor mange forskellige strategier kan I lave til $43 + 69$ (lav ny tallinje for hver strategi)? ⇄ **tallinje** → **strategi**

3

Kompensation: Vis $64 - 29$ som $64 - 30 + 1$ på tallinjen. Hvorfor skal der lægges 1 til og ikke trækkes 1 fra? ⇄ **bue** → **symbol** → **begrundelse**

4

Vælg visningen Decimaltal, og Indtast punkterne 0,5; 0,25; 0,75; 1,2 under Indtast. Hvor ligger 0,05? Nævn nogle tal, der ligger mellem punkter. Hvad betyder det, at man kan zoome ind på tallinjen? ⇄ **symbol** → **placering**

5

Lav buer på tallinjen til makkeren. Download som billede og vis til hinanden. Makkeren skriver regnestykket og en lille historie, der passer. Byt roller. ⇄ **buer** → **regnestykke** → **hverdagssprog**

6

Ekstra: Vælg visningen Heltal, og vis $-3 + 8$ og $2 - 7$. Hvornår går buen hen over nul? ⇄ **heltal** → **tallinje**



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvornår hjælper den tomme tallinje en elev i matematikvanskeligheder – og hvornår bliver den bare endnu én ting at huske? Hvad skal læreren spørge om undervejs?



Scan: Taltavle

Taltavlen: mønstre, tabeller og struktur

Undersøg mønstre i tabeller, lige og ulige tal og primtal på den digitale taltavle. Ændr tavlens opbygning, og se, hvordan mønstrene flytter sig.



MATEMATISK POINTE

Taltavlen viser titalssystemets struktur: Et felt lodret er ± 10 , et felt vandret er ± 1 . Mønstrene i tabellerne afhænger af, hvor mange kolonner tavlen har. Det er strukturen – ikke tallene – der skaber mønstret.

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89



HJÆLPEMIDLER

[Taltavle](#)

[Repræsentationer \(Hundredtavle\)](#)

Fysisk: en printet 100-tavle og farveblyanter



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Matematikvanskeligheder:** Digitale interventioner – primært træning og spil – gav en mellemstor effekt (0,55) for børn i matematikvanskeligheder, men med stor variation (Benavides-Varela m.fl., 2020).
- **Generelt:** Virtuelle hjælpemidler kan fokusere opmærksomheden på det matematiske og gøre det let at afprøve mange eksempler hurtigt (Moyer-Packenham & Westenskow, 2013).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · $\rightleftarrows$ = repræsentationsskift

1

Åbn **Taltavle**. Hvor står 1, og hvor står 100? Hvad sker der med tallet, når I går ét felt op, ned, til højre eller til venstre? Formulér reglen med ord og med regnetegn. $\rightleftarrows$ *table* $\rightarrow$ *sprog* $\rightarrow$ *symbol*

2

Vælg **Tabeller**, og klik på 3. Beskriv mønstret. Klik derefter på 4. Hvilke tal får begge farver – og hvorfor? Spil spillet Juniper Green (start m. lige tal, derefter faktor(divisor)/multiplum(gangetal). Kan man ikke vælge, så har man tabt. $\rightleftarrows$ *mønster* $\rightarrow$ *multiplikation*

3

Åbn Indstillinger, og sæt Antal kolonner til 6. Hvad sker der med 3-tabellen? Vælg Primtal. Hvorfor ligger primtallene over 3 kun i to søjler? $\rightleftarrows$ *struktur* $\rightarrow$ *forklaring*

4

Skjul tal på tallinjen: Sæt **skyderen** til fx 20 %, og tryk **Anvend**. Den ene af jer skal udvælge et skjult tal, mens den anden skal finde værdien af det skjulte tal. Tælles én ad gangen fra kendt værdi, bruges ± 10 eller andre strategier? $\rightleftarrows$ *table* $\rightarrow$ *strategi*

5

Slå talord til (Vis/skjul talord). Hvor passer de danske talord dårligt med tavlens struktur, fx femogtyve og halvtreds? Hvad betyder det for elever i vanskeligheder? $\rightleftarrows$ *tal* $\rightarrow$ *talord*

6

Ekstra: Sæt Talsystem (Base) til 5 og Antal kolonner til 5. Hvordan ser tavlen og mønstrene ud nu? $\rightleftarrows$ *base 10* $\rightarrow$ *base 5*



TIL FÆLLESGØRELSEN

Taltavlen kan starte i 0 eller 1 og tælle nedefra eller oppefra. Hvilken opbygning hjælper – og hvilken forvirrer? Hvem skal bestemme den?



Scan: Sømbræt

Sømbrættet: areal og omkreds med elastikker

Lav figurer med virtuelle elastikker, og undersøg sammenhængen mellem areal og omkreds. Hvad sker der med arealet, når figuren ændrer form?



MATEMATISK POINTE

Areal og omkreds er to forskellige mål for samme figur: Samme areal kan give forskellig omkreds – og omvendt. En retvinklet trekant er et halvt rektangel, og areal kan findes ved at dele op.



HJÆLPEMIDLER

[Sømbræt \(Geoboard\)](#)

[Repræsentationer \(Samme areal – forskellig omkreds\)](#)

Fysisk: sømbræt og elastikker eller prikpapier



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Matematikvanskeligheder:** Undervisning med virtuelle hjælpemidler hjalp elever med indlæringsvanskeligheder med at tilegne sig, fastholde og generalisere areal og omkreds (Satsangi & Bouck, 2015).
- **Generelt:** Vælg værktøjer med høj matematisk, kognitiv og pædagogisk troværdighed – sømbrætter er blandt dem, lærere oftest vælger (Moyer-Packenham, Salkind & Bolyard, 2008).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Lav rektangler med arealet 12 (1 felt = 1 enhed). Find alle muligheder. Hvilket rektangel har den største og hvilket den mindste omkreds? ⇄ *figur* → *tabel*

2

Lav figurer, der alle har omkredsen 16. Hvilken har det største areal? Saml resultaterne i en tabel. ⇄ *figur* → *tabel* → *mønster*

3

Lav en retvinklet trekant med kateterne 4 og 3. Hvad er arealet? Vis med en ekstra elastik, at trekanten er halvdelen af et rektangel. ⇄ *figur* → *figur* → *formel*

4

Lav en trekant uden rette vinkler. Find arealet ved at lægge et rektangel udenom og trække hjørnetrekanten fra. Skriv beregningen. ⇄ *figur* → *opdeling* → *regneudtryk*

5

Brug en spejlingsakse (Ny spejlingsakse), og lav en symmetrisk figur. Har spejlbilledet samme areal og omkreds? Hvorfor? ⇄ *figur* → *spejling* → *begrundelse*

6

Stil makkeren en opgave, fx: »Lav en figur med arealet 5 og mindst én skrå side.« Byt roller. ⇄ *sprog* → *figur*



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvornår er det en fordel, at elastikkerne er digitale – og hvornår mister eleven noget? Hvordan sikrer I, at eleverne skelner mellem areal og omkreds?



Scan: Spejlingsværktøj

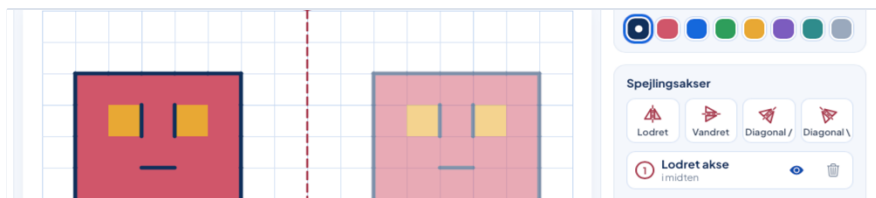
Spejling: forudsig, tegn og tjek

Tegn på et gitter, og lad værktøjet spejle i lodrette, vandrette og skrå akser. Forudsig altid først – slå derefter spejlingen til og tjek.



MATEMATISK POINTE

Ved en spejling har et punkt og dets spejlbillede samme afstand til spejlaksen, og linjen mellem dem står vinkelret på akse. Figuren bevarer form og størrelse, men vendes om.



HJÆLPEMIDLER

[Spejlingsværktøj](#)

[Sømbret \(spejlingsakse\)](#)

[Repræsentationer \(Koordinater og spejling\)](#)

Fysisk: ternet papir og et lille spejl



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Generelt:** I et dynamisk geometriprogram udviklede elever deres forståelse af transformationer ved at undersøge, hvad der bevares, og skelne tegning fra figur (Hollebrands, 2003).
- **Matematikvanskeligheder:** Virtuelle hjælpemidler forbedrede resultaterne for elever med indlæringsvanskeligheder på tværs af emner – især sammen med eksplicit undervisning (Park, Bryant & Shin, 2022).

OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

1

Tilføj en lodret akse (|), og slå spejlingen fra (spejl-knappen). Tegn en figur med Fyld på den ene side. Tegn på papir eller på den anden side, hvor spejlbilledet kommer. Slå spejlingen til og tjek. ⇄ *forudsigelse* → *tegning* → *tjek*

2

Tæl felterne fra et hjørne af figuren til akse og fra det tilsvarende hjørne i spejlbilledet til akse. Hvad opdager I? Formulér en regel. ⇄ *figur* → *tal* → *regel*

3

Skift til en skrå akse (/). Forudsig først. Hvorfor er skrå spejlinger sværere – og hvad kan hjælpe eleven, fx at dreje papiret? ⇄ *forudsigelse* → *tjek* → *strategi*

4

Tilføj både en lodret og en vandret akse. Hvor mange figurer får I? Hvilken bevægelse fører den oprindelige figur over i den modsatte i det skrå hjørne? ⇄ *spejling* → *drejning*

5

Tegn halvdelen af et bogstav eller et symbol, og lad makkeren gætte hele figuren, før I slår spejlingen til. Hvilke bogstaver har en symmetriakse? ⇄ *del* → *helhed* → *sprog*

6

Ekstra: Repræsentationer → Koordinater og spejling. Spejl punktet (2, 3) i y-aksen. Hvad sker der med koordinaterne? ⇄ *figur* → *koordinater*



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvad sker der med elevens tænkning, når værktøjet spejler automatisk? Hvordan sikrer I, at eleven forudsiger og begrundes – og ikke bare ser efter?

Repræsentationer: én brøk – mange udtryk

Byg brøker med brøkbrikker, brøkstang, brøkcirkel og tallinje på det samme arbejdsark. Undersøg, hvornår brøker er lige store, og hvordan del af en helhed hænger sammen med et tal på tallinjen.

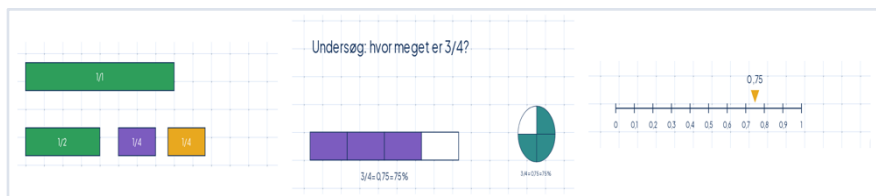


Scan: Repræsentationer
Eller gå på polypad.amplify.com



MATEMATISK POINTE

En brøk kan være en del af en helhed, en del af en mængde og et tal på tallinjen. Eleven skal kunne skifte mellem repræsentationerne og se, at $1/2$, $2/4$, $0,5$ og 50% er det samme tal – selv om de ser forskellige ud.



OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · $\rightleftarrows$ = repræsentationsskift

1

Undervisningsopstillinger → Byg en hel med brøker. Byg 1 hel på så mange måder som muligt med brøkbrikker. Skriv hver løsning som et regnestykke, fx $1/2 + 1/4 + 1/4 = 1$. $\rightleftarrows$ brikker → regnestykke

2

Find alle brikker og kombinationer, der er lige så lange som $1/2$. Hvad har de til fælles? Formulér en regel for ens brøker. $\rightleftarrows$ brikker → regel

3

Undervisningsopstillinger → Brøk, decimal og procent: Undersøg $3/4$ som brøkstang, brøkcirkel og punkt på tallinjen. Ændr brøken til $2/3$. Hvilken repræsentation er bedst til at sammenligne $2/3$ og $3/4$? $\rightleftarrows$ stang → cirkel → tallinje

4

Hvilken er størst: $3/8$ eller $2/5$? Vis det med to forskellige repræsentationer på arket. Forklar, hvorfor det ikke er nok at se på tæller og nævner hver for sig. $\rightleftarrows$ symbol → to repræsentationer → forklaring

5

Brug brikken Tekst (Forklaringer), og skriv til en elev, hvorfor $1/3$ er større end $1/4$. Brug mindst to repræsentationer i forklaringen. $\rightleftarrows$ repræsentation → skriftlig forklaring

6

Ekstra: Hvad er $3/4$ af 12? Vis det med prikfelt, tierramme eller talbrikker. $\rightleftarrows$ brøk → mængde



HJÆLPEMIDLER

[Repræsentationer \(arbejdsark\)](#)

[Brøklaboratoriet](#)

[Rationale tal](#)

Fysisk: brøkstrimler eller brøkcirkler



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Matematikvanskeligheder:** Virtuelle brøkmaterialer med eksplicit undervisning forbedrede brøkgregning hos elever i matematikvanskeligheder (Satsangi & Raines, 2023). Et VRA-forløb hjalp elever med funktionsnedsættelser med ækvivalente brøker (Bouck m.fl., 2017).
- **Generelt:** Flere repræsentationer hjælper kun, hvis eleven forstår hver af dem og kan oversætte mellem dem (Ainsworth, 2006; Duval, 2006).



TIL FÆLLESGØRELSEN

Hvor mange repræsentationer er for mange for en elev i vanskeligheder? I hvilken rækkefølge vil I introducere dem – og hvornår skal eleven selv vælge?



Scan: Gangerektangel

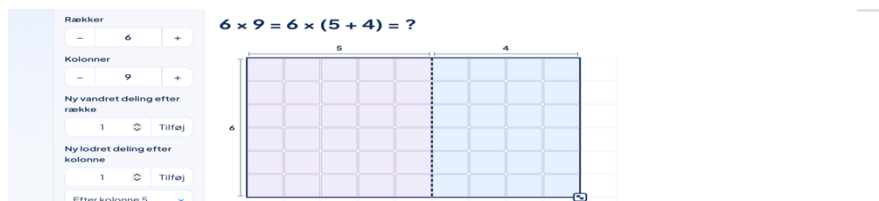
Gangerektangel: del, drej og se arealet

Del og drej et gangerektangel, og se, hvordan delprodukter tilsammen giver hele arealet. Skift mellem tal og bogstaver, og undersøg den kommutative lov og kvadratsætningerne.



MATEMATISK POINTE

Arealet af et rektangel er summen af delarealerne: $9 \times 6 = 5 \times 6 + 4 \times 6$. Delingen ændrer delenes omkreds, men ikke arealet. Med bogstaver: $a(b + c) = ab + ac$.



OPGAVER Arbejd 2 og 2 · byt roller ved hvert nummer · ⇄ = repræsentationsskift

- 1 Byg 9×6 (Rækker 6, Kolonner 9). Find arealet uden at tælle felterne ét ad gangen. Find så mange forskellige måder som muligt, og skriv hver måde som et regnestykke. ⇄ *felter* → *regnestykke*
- 2 Del rektanglet i to med én deling. Find alle de opdelinger, I kan, og skriv hver som et regnestykke, fx $9 \times 6 = 5 \times 6 + 4 \times 6$ osv. Hvad har de til fælles? Formulér en regel. ⇄ *deling* → *regnestykke* → *regel*
- 3 Slå A og O til. Sammenlign delenes areal og omkreds med hele rektanglets: Hvad ændrer sig, og hvad gør ikke? Find en forklaring på, hvorfor. ⇄ *areal* → *omkreds* → *begrundelse*
- 4 Tryk Byt. Er 6×9 det samme som 9×6 ? Hvad er ens, og hvad er forskelligt? Hvordan kan man bruge det, når man skal regne et stort gangestykke ud? ⇄ *figur* → *drejning* → *regneregul*
- 5 Skjul Facit. Stil makkeren et stort gangestykke, fx 7×14 eller 13×8 . Makkeren deler rektanglet og forklarer sin strategi, før I viser facit. Byt roller. ⇄ *stykke* → *deling* → *strategi*
- 6 Ekstra: Skift til Bogstaver, og undersøg kvadratsætning 1, 2 og 3 med $a = 6$ og $b = 2$. Hvilke områder ser I? Formulér hver sætning med ord. ⇄ *tal* → *bogstaver* → *ord*



HJÆLPEMIDLER

[Gangerektangel](#)

Fysisk: ternet papir og farveblyanter



FORSKNINGEN PEGER PÅ

- **Generelt:** Virtuelle hjælpemidler gør det let at afprøve mange opdelinger hurtigt (Moyer-Packenham & Westenskow, 2013).
- **Repræsentationer:** Tal, figur og bogstaver hjælper kun, hvis eleven forstår hver af dem og kan oversætte mellem dem (Ainsworth, 2006; Duval, 2006).



TIL FÆLLESGØRELSEN

Gangerektanglet viser den kommutative og den distributive lov som figur. Hvornår ser eleven loven i figuren – og hvornår regner eleven bare uden at tænke over den?

Kan online hjælpemidler noget? Ja – men ikke af sig selv

Et virtuelt hjælpemiddel er »en interaktiv, webbaseret, visuel repræsentation af et dynamisk objekt, der giver mulighed for at konstruere matematisk viden« (frit efter Moyer, Bolyard & Spikell, 2002).

0,35

moderat effekt af virtuelle hjælpemidler sammenlignet med anden undervisning (metaanalyse, 66 rapporter).

Moyer-Packenham & Westenskow, 2013

0 → 0,49

Ingen effekt ved én dags brug – moderat effekt ved brug i mere end 10 dage. Det kræver tid.

Moyer-Packenham & Westenskow, 2013

Færre skel

Med virtuelle brøkværktøjer betød sprog, socioøkonomi og køn mindre for elevernes resultater.

Moyer-Packenham m.fl., 2014

Hvad gør virtuelle hjælpemidler særlige? Fem kvaliteter (Moyer-Packenham & Westenskow, 2013)



Fokuseret afgrænsning
retter opmærksomheden mod det matematiske



Kreativ variation
flere forskellige løsninger og veje



Samtidig kobling
forbinder repræsentationer og handlinger



Effektiv præcision
præcise modeller uden rod og tællefejl



Motivation
eleverne holder ud længere

Hvem taler forskningen om?

Forbehold: Forskningen er overvejende amerikansk og bruger andre betegnelser end vi gør. Jeg placerer derfor hver kilde i én af de tre elevprofiler, som én forståelse af elever i matematikvanskeligheder rummer (Christensen & Thompson, 2025; Lindenskov & Lindhardt, 2023). Man kunne også have taget andre definitioner.

Alene

i matematikvanskeligheder: kun i matematik – midlertidigt eller længerevarende. Findes ofte via lave testresultater. Int.: mathematics difficulty, at risk.

Fx Satsangi & Raines, 2023; Kiru m.fl., 2018

Også

i matematikvanskeligheder: sammen med fx generelle indlæringsvanskeligheder, ADHD eller ordblindhed. Int.: students with disabilities, ID, ASD.

Fx Bouck m.fl., 2017, 2024; Shin m.fl., 2021

Talblinde

Længerevarende, specifikke vanskeligheder med tal, facts og regning. Int.: dyscalculia, MLD – i USA ofte samlet under »learning disabilities«.

Fx Kucian m.fl., 2011; Lafay m.fl., 2019

15 %

af en årgang er i matematikvanskeligheder. 29 % af dem har mindst én registreret funktionsnedsættelse – de tre profiler findes i alle klasser.

Mikkelsen m.fl., 2023

Derfor kan forskningen bruges om elever i matematikvanskeligheder



Samme paraply

Studierne undersøger hver en del af den danske paraply – ikke en anden elevgruppe. Og elevernes oplevelser overlapper på tværs af profilerne (Christensen & Thompson, 2025).



Samme kendetegn

Elever alene i matematikvanskeligheder findes typisk via lave testresultater – ligesom »mathematics difficulty« og »at risk« i de amerikanske studier.



Samme effekt

Elever i risiko (Tau-U 0,91) og elever ”med” indlæringsvanskeligheder (0,88) fik næsten samme effekt af manipulativer (Peltier m.fl., 2020).



Samme pointer

Virtuelle materialer virker ikke alene – model og symbol skal kobles eksplicit. Det går igen på tværs af profilerne og i den generelle forskning.

Online hjælpemidler og elever i matematikvanskeligheder

Forskning, der har undersøgt både virtuelle/digitale hjælpemidler og elever i matematikvanskeligheder – på tværs af de tre elevprofiler.

0,55

mellemstor effekt af digitale interventioner – primært træning og spil – for børn i matematikvanskeligheder (15 RCT) – men stor variation.

Benavides-Varela m.fl., 2020

0,98 ~ 0,89

Virtuelle og fysiske manipulativer var lige effektive for elever i risiko og med funktionsnedsættelser (53 studier).

Peltier m.fl., 2020

19

single-case-studier: Elever med indlæringsvanskeligheder forbedrede sig – ofte med fastholdelse og generalisering.

Park, Bryant & Shin, 2022

35 studier

med 114 elever med forskellige funktionsnedsættelser: klar effekt og fortsat fremgang. Effekten afhang bl.a. af værktøjets visuelle model.

Shin, Park, Grimes & Bryant, 2021

Det skal I være opmærksomme på



Eksplicit undervisning er nøglen

Effekten kommer, når hjælpemidlet kombineres med modellering, guidet øvelse og feedback (Peltier m.fl., 2020; Satsangi & Raines, 2023; Shin m.fl., 2017).



Teknologien viser ikke matematikken

Mange digitale forløb gav øvelse og feedback, men få viste og forklarede indholdet. Det er lærerens opgave (Kiru m.fl., 2018).



Stor variation – vælg bevidst

Studierne er meget forskellige og har metodiske svagheder (Lafay m.fl., 2019). I ét algebrastudie gav fysiske materialer lidt bedre resultater (Satsangi m.fl., 2016).



Online kræver deltagelse

Online undervisning med virtuelle materialer virkede forskelligt – afhængigt af elevens deltagelse og holdning (Park, Bryant & Shin, 2024).

Det er ikke nok at stille dem til rådighed



»Om digital teknologi virker, afhænger af opgavedesignet, lærerens rolle og den sammenhæng, den bruges i.«

Frit efter Drijvers (2013)

Det konkrete er ikke det fysiske. Det afgørende er de meningsfulde forbindelser – og dem kan digitale materialer også give (Sarama & Clements, 2009).

Forståelse kræver repræsentationsskift. Eleven skal kunne skifte og koordinere mellem repræsentationer (Duval, 2006; Ainsworth, 2006).

Sådan rammesætter I arbejdet

- 1 **Start med den matematiske pointe** – ikke med værktøjet (Drijvers, 2013).
- 2 **Lad eleverne forudsige, før de klikker:** »Hvad tror I, der sker?« (Schoenfeld, 1992)
- 3 **Kræv repræsentationsskift:** sig det, tegn det, skriv det (Ainsworth, 2006; Duval, 2006; Suh & Moyer, 2007).
- 4 **Forbind handling og symbol eksplicit:** modellér, spørg og lad eleven begrunde (Shin m.fl., 2017; Peltier m.fl., 2020).
- 5 **Brug det samme hjælpemiddel over tid** – ikke kun i én time (Moyer-Packenham & Westenskow, 2013).
- 6 **Gå fra virtuel model over tegning til symbol** (VRA-forløb; Bouck m.fl., 2017).
- 7 **Vælg værktøjer med høj troværdighed:** matematisk, kognitivt og pædagogisk (Moyer-Packenham m.fl., 2008).

Hvad fik I øje på?

Kan det noget?



1 · Sandsynlighed

Hvornår hjalp værktøjet jer til at tænke – og hvornår tænkte det for jer?



2 · Algebra

Hvornår er vippen en hjælp – og hvornår en forhindring?



3 · Geometri og måling

Hvad kan fysiske klodser, som digitale ikke kan – og omvendt?



4 · Tal og positionssystem

Proportional (klodser) eller ikke-proportional model (brikker) – hvad vælger I først?



5 · Tal og regning

Hvornår hjælper den tomme tallinje – og hvornår bliver den endnu én ting at huske?



6 · Tal og mønstre

Hvilken opbygning af taltavlen hjælper – og hvilken forvirrer?



7 · Geometri og måling

Hvad vinder og taber eleven ved digitale elastikker? Hvordan skelnes areal og omkreds?



8 · Geometri

Hvordan sikrer I, at eleven forudsiger og begrunder – og ikke bare ser efter?



9 · Brøker

Hvor mange repræsentationer er for mange – og i hvilken rækkefølge?



10 · Tal og regning

Hvornår ser eleven loven i gangerektanglet – og hvornår regner eleven bare uden at tænke over den?

Hvorfor kan det?

Virtuelle manipulativer

Flere online hjælpemidler at arbejde videre med efter workshopen.



The Math Learning Center

mathlearningcenter.org/apps



MathsBot

mathsbot.com/manipulativeMenu



PhET Interactive Simulations

phet.colorado.edu/en/simulations/filter?subjects=math-and-statistics&type=html



Didax

didax.com/math/virtual-manipulatives.html



Toy Theater

toytheater.com/category/teacher-tools/virtual-manipulatives



Brainingcamp

brainingcamp.com/manipulatives



Polypad (Amplify)

polypad.amplify.com

Online og virtuelle hjælpemidler – generelt

Forskning om online/virtuelle hjælpemidler i matematik (Duval og Ainsworth er medtaget for repræsentationsskift). ● = PDF i mappen Litteratur

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198. doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

● Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). *PNA*, 8(1), 1–20. files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1054923.pdf

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55–72. [doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00004-X](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X)

Moyer, P. S., Bolyard, J. J. & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372–377. doi.org/10.5951/TCM.8.6.0372

● Moyer-Packenham, P. S., Baker, J., Westenskow, A., Anderson, K., Shumway, J. F. & Jordan, K. E. (2014). Predictors of achievement when virtual manipulatives are used for mathematics instruction. *REDIMAT*, 3(2), 121–150. doi.org/10.4471/redimat.2014.46

Begrebsafklaring: elever i matematikvanskeligheder

● Christensen, T. G. & Thompson, M. (2025). Deltagelsesmuligheder i matematik: Elever i matematikvanskeligheders oplevelser som afsæt for didaktisk udvikling [Kandidatspeciale]. DPU, Aarhus Universitet (afsnit 8.1.2). [FiMV.dk](https://fiMV.dk)

Lindenskov, L. & Lindhardt, B. (2023). Vidensopsamling – Elever i matematikvanskeligheder. DPU, Aarhus Universitet. pure.au.dk/ws/files/358821649/Vidensopsamling_-_Elever_i_matematikvanskeligheder.pdf

Mikkelsen, M., Rangvid, B. S. & Jensen, V. M. (2023). Børn og unge i matematikvanskeligheder: En registeranalyse af konsekvenser og kendetegn. VIVE.

● Moyer-Packenham, P. S., Salkind, G. & Bolyard, J. J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(3), 202–218. citejournal.org/wp-content/uploads/2016/04/v8i3mathematics1.pdf

Moyer-Packenham, P. S. & Westenskow, A. (2013). Effects of virtual manipulatives on student achievement and mathematics learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, 4(3), 35–50. doi.org/10.4018/jvple.2013070103

● Ochugboju, A. O. & Díez-Palomar, J. (2025). Systematic review on the use of virtual and physical manipulatives by primary school teachers. *Social Sciences & Humanities Open*, 12, 102188. doi.org/10.1016/j.ssaho.2025.102188

● O'Dell, J. R., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Rupnow, T. J., Clements, D. H., Sarama, J., Rutherford, G. & Beck, P. S. (2017). Using a virtual manipulative environment to support students' organizational structuring of volume units. I *Proceedings of PME-NA 39* (s. 1329–1336). files.eric.ed.gov/fulltext/ED581363.pdf

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). »Concrete« computer manipulatives in mathematics education. *Child Development Perspectives*, 3(3), 145–150. doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00095.x

Stohl, H. & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 319–337. [doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00132-3](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00132-3)

● Suh, J. & Moyer, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155–173. www.learntechlib.org/primary/p/22799/

Online hjælpemidler og elever i matematikvanskeligheder

Forskning, der har undersøgt både virtuelle/digitale hjælpemidler og elever i vanskeligheder eller med indlæringsvanskeligheder. ● = PDF i mappen Litteratur

● Benavides-Varela, S., Zandonella Callegher, C., Fagiolini, B., Leo, I., Altoè, G. & Lucangeli, D. (2020). Effectiveness of digital-based interventions for children with mathematical learning difficulties: A meta-analysis. *Computers & Education*, 157, 103953. doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103953

Bouck, E. C., Bassette, L., Shurr, J., Park, J., Kerr, J. & Whorley, A. (2017). Teaching equivalent fractions to secondary students with disabilities via the virtual-representational-abstract instructional sequence. *Journal of Special Education Technology*, 32(4), 220–231. doi.org/10.1177/0162643417727291

Bouck, E. C., Harris, M., Whorley, A. & Long, H. (2024). Applying the virtual-representational-abstract integrated instructional sequence to teaching subtraction with regrouping. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 59(1), 45–58. doi.org/10.1177/215416472405900105

● Bouck, E. C., Mathews, L. A. & Peltier, C. (2020). Virtual manipulatives: A tool to support access and achievement with middle school students with disabilities. *Journal of Special Education Technology*, 35(1), 51–59. doi.org/10.1177/0162643419882422

Kiru, E. W., Doabler, C. T., Sorrells, A. M. & Cooc, N. A. (2018). A synthesis of technology-mediated mathematics interventions for students with or at risk for mathematics learning disabilities. *Journal of Special Education Technology*, 33(2), 111–123. doi.org/10.1177/0162643417745835

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E. & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, 57(3), 782–795. doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.01.070

● Lafay, A., Osana, H. P. & Valat, M. (2019). Effects of interventions with manipulatives on immediate learning, maintenance, and transfer in children with mathematics learning disabilities: A systematic review. *Education Research International*, 2019, 2142948. doi.org/10.1155/2019/2142948

Long, H. M., Bouck, E. C. & Kelly, H. (2023). An evidence-based practice synthesis of virtual manipulatives for students with ASD and IDD. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 38(3), 147–157. doi.org/10.1177/10883576221121654

Park, J., Bryant, D. P. & Shin, M. (2022). Effects of interventions using virtual manipulatives for students with learning disabilities: A synthesis of single-case research. *Journal of Learning Disabilities*, 55(4), 325–337. doi.org/10.1177/00222194211006336

Park, J., Bryant, D. P. & Shin, M. (2024). Effects of a synchronous online fraction intervention using virtual manipulatives for students with learning disabilities. *Journal of Special Education Technology*, 39(2), 234–246. doi.org/10.1177/01626434231195313

● Peltier, C., Morin, K. L., Bouck, E. C., Lingo, M. E., Pulos, J. M., Scheffler, F. A., Suk, A., Mathews, L. A., Sinclair, T. E. & Deardorff, M. E. (2020). A meta-analysis of single-case research using mathematics manipulatives with students at risk or identified with a disability. *Journal of Special Education*, 54(1), 3–15. doi.org/10.1177/0022466919844516

Satsangi, R., Bouck, E. C., Taber-Doughty, T., Bofferding, L. & Roberts, C. A. (2016). Comparing the effectiveness of virtual and concrete manipulatives to teach algebra to secondary students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 39(4), 240–253. doi.org/10.1177/0731948716649754

Satsangi, R., Hammer, R. & Hogan, C. D. (2018). Studying virtual manipulatives paired with explicit instruction to teach algebraic equations to students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 41(4), 227–242. doi.org/10.1177/0731948718769248

Satsangi, R. & Bouck, E. C. (2015). Using virtual manipulative instruction to teach the concepts of area and perimeter to secondary students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 38(3), 174–186. doi.org/10.1177/0731948714550101

Satsangi, R. & Raines, A. R. (2023). Examining virtual manipulatives for teaching computations with fractions to children with mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 56(4), 295–309. doi.org/10.1177/00222194221097710

● Shin, M., Bryant, D. P., Bryant, B. R., McKenna, J. W., Hou, F. & Ok, M. W. (2017). Virtual manipulatives: Tools for teaching mathematics to students with learning disabilities. *Intervention in School and Clinic*, 52(3), 148–153. doi.org/10.1177/1053451216644830

Shin, M., Park, J., Grimes, R. & Bryant, D. P. (2021). Effects of using virtual manipulatives for students with disabilities: Three-level multilevel modeling for single-case data. *Exceptional Children*, 87(4), 418–437. doi.org/10.1177/00144029211007150

● Thomas, J., Bicaud, S. & Simmons, K. D. (2025). The effects of concrete and virtual manipulatives on solving algebraic equations in students with disabilities. *Journal of Special Education Technology*, 40(1), 104–116. doi.org/10.1177/01626434241263055