



Tegning som strategi i arbejde med matematiske udfordringer

mona.rosseland@hvl.no

Mona Røsseland, Førsteamanuensis, Høgskolen på Vestlandet, Bergen

1

Hvor meget har de sparet?

Celina, Thea og Filip sparer penge til de skal på ferie.

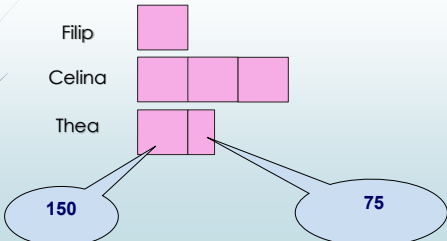
- Celina har sparet tre gange så meget som Filip.
- Thea har sparet halvdelen så meget som Celina.
- Thea har sparet 75 kr mere end Filip.
- Hvor meget har hver af dem sparet?



(Multi 5a, kap 1)

2

Tegn-model-strategi



Filip

Celina

Thea

150

75

3

Problemløsning er grundpillen i matematisk uddannelse

- For at løse problemerne hjælper det **at have gode strategier og tålmodighed til udforskning.**
- En vigtig del af problemløsningsprocessen er evnen til at skifte mellem passende **repræsentationsformer** såsom konkrete, verbale udtryk, tegninger, tabeller, diagrammer, symboler,

4

Brug så mange strategier som muligt

Opgave:

Der er 28 elever i en klasse. Forholdet mellem antallet af piger og drenge er 4 : 3. Hvor mange piger er der i klassen?



5

Brug så mange strategier som muligt

► Der er 28 elever i en klasse. Forholdet mellem antallet af piger og drenge er 4 : 3. Hvor mange piger er der i klassen?

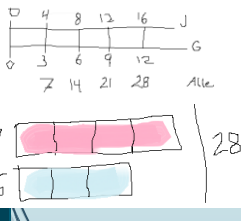



4	3	7
4	3	14
4	3	21
4	3	28
4	3	28

6

Brug så mange strategier som muligt

- Der er 28 elever i en klasse. Forholdet mellem antallet af piger og drenge er 4 : 3. Hvor mange piger er der i klassen?



Handwritten calculations:

$$28 : 7 = 4$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$3 \cdot 4 = 12$$

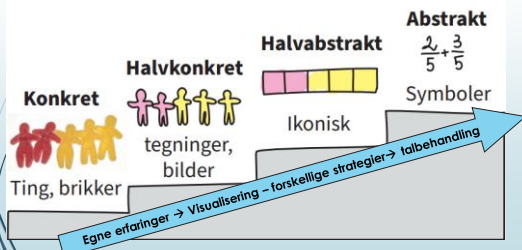
7

Jerome Bruner (1915 -2016) Teori om erfaringsbaseret udviklingsstadier

- Jerome Bruners teori om hvordan lagring af matematisk viden foregår gennem tre faser, **enactive**, **ikonisk** og **symbolsk**.
- Bruner hævder, at eleverne ville lære matematik bedre, hvis de først stødte på begreber og procedurer ved aktivt at modellere dem med konkrete objekter og så gennem tegning og visuelle udtryksformer.
- Bruner lægger vægt på, at børn skal være aktive i deres egen læringsproces med at opbygge mentale strukturer, og han mener, at lærerne skal facilitere dette ved at variere undervisningen med forskellige tilgange.

8

Konkretiseringstrappe

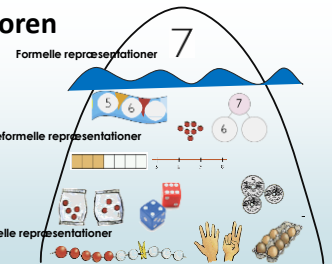


9

Isbjergmetaforen

At udvikle en god forståelse af tal afhænger af arbejde med forskellige repræsentationer

og forståelse for sammenhængen mellem dem.



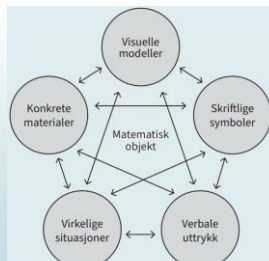
Freudenthal Institute,
Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008).

10

Representasjonssirkel

At udvikle en god forståelse af tal afhænger af arbejde med forskellige repræsentationer

og forståelse for sammenhængen mellem dem.

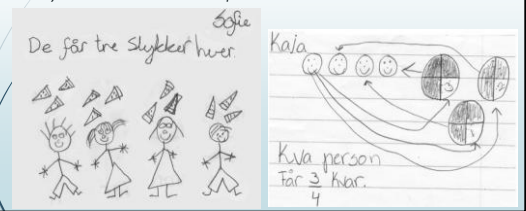


Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1982),
Duval (2017).

11

Tegning som strategi til løsning af matematiske udfordringer

- Fire venner er på pizzarestaurant. De bestiller tre like pizzaer. De skal ha like mye hver. Hvordan skal de dele pizzaene?



13

Se på de tegninger, hvad er ens, og hvad er anderledes?

Tegning som produkt

- viser, at hver af de tre venner har modtaget tre stykker pizza
- indeholder flere detaljer - tøj på børnene - ingredienser på pizzaen
- viser ikke, hvordan Sofie har regnet

Tegning som proces

- omfatter både tegning, tekst og tal
- færre detaljer - stiliserede ansigter - pizzaerne er cirkler uden indhold
- viser hvordan Kaja er nået frem til svaret - pile

14

Tegning som proces

► Kari har trehjulede cykler og tohjulede i sin butik. I alt er der 19 cykelhjul i butikken. Hvor mange trehjulede cykler og hvor mange tohjulede har hun?

Jonah (3. klasse) bruger tegning som proces.

Han starter med at tegne efter oplysningerne i opgaveteksten

15

Hvad er modeltegning?

- En metode til at repræsentere matematiske problemer ved hjælp af stilistiske tegninger.
- Der er flere variationer af modeltegningen, men alle følger de samme grundlæggende principper:
 - Modeller er konstrueret på en specifik måde ved hjælp af rektangler til at repræsentere kendte og ukendte størrelser
 - Blokmodeller er designet til at indsamle al relevant information fra et problem, for at se sammenhængen mellem fakta præsenteret i et problem. Dette hjælper børn med at begynde at arbejde hen imod et svar

16

Modeltegning som støtte til tanken

- Modeltegnestrategien kan med stor fordel bruges, når der arbejdes med tekstopgaver
- Chris brugte $\frac{1}{7}$ af sin ugentlige løn hver dag. Tre dage efter at han havde fået udbetalt sin ugeløn, havde han 60 kroner tilbage. Hvor mange penge brugte Chris i de første tre dage?

17

Hvorfor modeltegning?

- Modellerne hjælper børn med en af de mest væsentlige dele af læringsprocessen:
- Visualiser og giv mening til et problem, så de kan begynde at gå videre til den mere abstrakte del af udregningen af et svar.
- Et værktøj til at hjælpe eleverne med at se de trin og handlinger, der er nødvendige for at løse problemet.

18

Hvordan fungerer modeltegning?

- Eleverne får et hjælpemiddel til at håndtere information, de forholder sig til opgavens kompleksitet og de kommunikerer, hvordan de tænker.

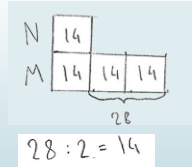
Elvira (6. klasse) har brugt modeltegning, når hun har løst opgaven:

Noras mor er tre gange så gammel som Nora. Hun er også 28 år ældre end Nora. Hvor gammel er Nora?

19

Elvira's strategi

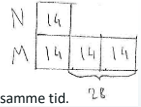
- Noras mor er tre gange så gammel som Nora.
- Hun er også 28 år ældre end Nora. Hvor gammel er Nora?
- Hvor gammel er Nora?



Nora er 14 år gammel.

20

- Elvira's modeltegning viser de størrelser, der indgår i tekstopgaven.

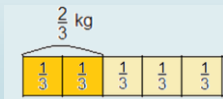


- At tegne modellen samtidig med, at hun gennemarbejder teksten trin for trin, betyder, at hun ikke skal beskæftige sig med alt i teksten på samme tid.
- Hun bruger rektanglerne til at indsamle alle relevante oplysninger. Hun synliggør de relevante størrelser og forstår, hvordan de hænger sammen, hun forstår opbygningen af opgaven.
- I processen med at løse opgaven engagerer Elvira sig i tre udtryksformer - **tekstuelle, billedlige og symbolske repræsentationer**:
 - Hun læser og fortolker teksten. Hun overfører størrelserne i teksten til modeltegningen. Modellen hjælper hende med at beregne svaret med matematiske symboler.

21

Modeltegning og division med brøk

- $\frac{2}{3}$ kg hvedemel er $\frac{2}{5}$ af den fulde opskrift.
- Hvor meget mel skal du bruge til den fulde opskrift?

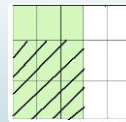


22

Forståelse kontra drilling af regler

- Multiplikation med brøker

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$$



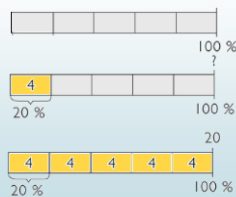
23

© Hæns 20

23

Modeltegning og procent

Dette er 20 % av seigmennene i en pose.
Hvor mange seigmenn var det i hele posen?



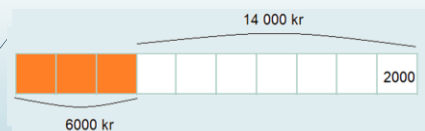
24

© Hæns 20

24

Lise betaler 30 % skat

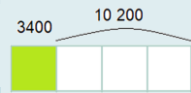
- Hvor meget skal hun tjene for at få udbetalt 14.000 kroner?
- Hvor meget skal hun betale i skat?



25

Lars betaler 25 % skat

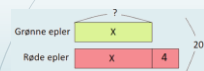
- Hvor meget får han udbetalt, hvis han betaler 3.400 kr. i skat?



26

Modeltegning og algebra

Det er 20 røde og grønne epler i en pose. Hvis det er fire flere røde enn grønne epler, hvor mange grønne epler er det i posen?



Antallet af røde æbler er $x + 4$.
Samlede antal æbler bliver $x + (x + 4) = 20$.

Kan løses algebraisk med støtte i en modeltegning. For eksempel kunne rektanglet, der repræsenterer antallet af grønne æbler, være x .

$$\begin{aligned}x + (x + 4) &= 20 \\2x + 4 - 4 &= 20 - 4 \\2x &= 16 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{16}{2} \\x &= 8\end{aligned}$$

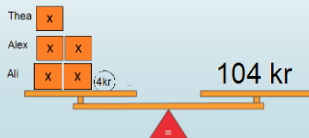
27

Modeltegning som en hjælp til forståelse af algebra

Alex, Thea og Ali har i alt 104 kr.

Alex har dobbelt så mange penge som Thea.

Ali har 4 kr. mere end Alex.



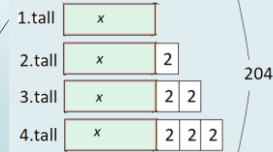
$$\begin{aligned}x + 2x + 2x + 4 &= 104 \\5x + 4 &= 104 \\5x + 4 - 4 &= 104 - 4 \\5x &= 100 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{100}{5} \\x &= 20\end{aligned}$$

28

Modeltegning og algebra

- 22, 24, 26 og 28 er fire på hinanden følgende lige tal, der summer til 100. Find fire andre lige tal, der summer til 204.

- Hvad er det mindste antal af disse fire lige tal?



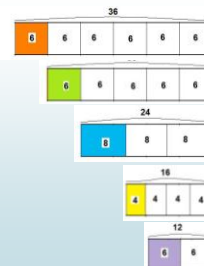
29

Problemløsning med brøker

- Bedstemor har bagt kiks og lagt dem i en kasse. En nat vågner bedstefar og beslutter sig for at finde noget godt at spise. Han finder æsken med kiks og spiser $1/6$ af kiksene.
- Dagen efter kommer lille Ole på besøg og han vil også have kiks. Han spiser $1/5$ af det, der var tilbage i kikkassen.
- Så kommer tante Magda på besøg og hun spiser lige så godt $1/3$ af de kiks der var tilbage efter Oles besøg.
- Kort efter kommer Pia, og hun vil også gerne have kiks af bedstemor. Hun spiser $1/4$ af resten af småkagerne.
- Når aftenen kommer, sætter bedstemor sig ned og spiser halvdelen af det, der er tilbage. Så er der kun seks kiks tilbage.
- Hvor mange kiks spiste de forskellige mennesker?
- Hvor mange småkager bagte bedstemor dagen før?

13-Nov-25

30



Bedstefar spiser $1/6$. Vi ser at $36/6$ er 6 kiks, og da vi vil have $1/6$ væk (6/6) 6 kiks. Dermed er der $(36 - 6)$ 30 kiks.

Ole spiste $1/5$. Vi ser at $30/5$ er 6 kiks, og da vi vil have $1/5$ væk (6/5) 6 kiks. Dermed er der $(30 - 6)$ 24 kiks.

Magda spiste $1/3$. $24/3$ er det samme som $(24/3)$ 8 kiks. Da er $(24 - 8)$ 16 kiks.

Pia spiste $1/4$. Vi ser at $16/4$ er det samme som 4 kiks. Da vil $1/4$ væk (4/4) 4 kiks.

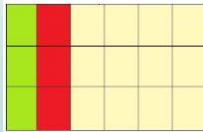
Bedstemor spiste $1/2$ som var 8 kiks.

13-Nov-25

31

Problemløsning med brøk

- Bedstefar finder æsken med kiks og spiser $\frac{1}{6}$ af kiksene.
- Dagen efter kommer lille Ole på besøg og han vil også have kiks. Han spiser $\frac{1}{5}$ af det, der var tilbage i kikkassen.
- Så kommer tante Magda på besøg og hun spiser lige så godt $\frac{1}{3}$ af de kiks der var tilbage efter Oles besøg.

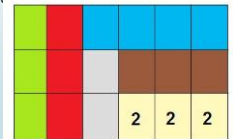


13-Nov-25

32

Problemløsning med brøk

- Kort efter kommer Pia, og hun vil også gerne have kiks af bedstemor. Hun spiser $\frac{1}{4}$ af resten af småkagerne.
- Når aftenen kommer, sætter bedstemor sig ned og spiser halvdelen af det, der er tilbage.
- Så er der kun seks kiks tilbage.

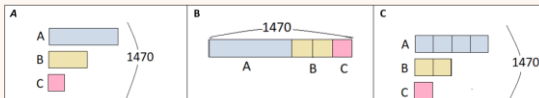


14-Nov-25

33

Her er det en tekstoppgave og tre ulike varianter til modelltegning. Oppgaven er å vurdere hvilken modell som passer best til tekstoppgaven. I utgangspunktet skal det ikke gjøres noen utregninger, bare vurdere hva som er likt og ulikt mellom de tre modellene, og avgjøre hvilken modell som gir best støtte når en skal regne ut svaret.

En is-produent lagde en dag til sammen 1470 is av type A, B og C. De lagde dobbelt så mange is av type A som type B. De lagde halvparten så mange type C som type B. Hvor mange is av hver type lagde de denne dagen?



34

Referanseliste

- Andersen, M. W. (2008). *Matematiske bilder, språk og læsning*. Dafolo
- Andreassen, R., & Strømshø, H. (2009). Lesestrategier i undervisningen. *Bedre Skole nr. 2*, 43-47.
- Borasi, R., Siegel, M. Fonzi, J., Smith C.F. (1998). Using Transactional Reading Strategies to Support Sense-Making and Discussion in Mathematics Classrooms: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29, No. 3, 275-305
- Englund, L. (2010). Raise the bar on problem solving. *Teaching children mathematics*, 17(3), 156-163.
- Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. *Applied mathematical problem solving*, 111-180.
- Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number concepts. In *Mathematics for grades 5-9, 1982 NCTM Yearbook* (pp. 59-72).

35

Tegning som strategi

(et utvalgt av matematiske utfordringer)



Hovedlitteratur til denne forelesningen

<https://cospar.fagbokforlaget.no/Boeker/tegning-som-strategi>

36

Bestill faktura



37