

Vidensopsamling

Elever i matematikvanskeligheder



Af Lena Lindenskov og Bent Lindhardt

2023

Indhold

Forord	3
1. Søgemetodik og vidensopsamling	5
2. Hovedresultater	9
3. Konsekvenser	16
4. En afgrænsning af fænomenet	20
5. Perspektiver på årsagssammenhænge	27
6. Forældreperspektivet	41
7. Hvad kan man gøre?	42
8. Hjælpe midler	51
9. Overgangsproblemer	55
10.Specialskoler – specialundervisning	59
11.Litteraturliste	61

Forord

Foreliggende materiale er resultatet af en henvendelse fra Egmont Fonden grundet ønsket om at få et overblik over eksisterende viden på området ”elever i matematikvanskeligheder”. Vidensopsamlingen er struktureret efter de problemfelter, som, vi mener, er fundamentale for forståelse af matematikvanskeligheder. Søgearbejdet har været understøttet af informationsspecialist Palle Vest Nielsen, Professionshøjskolen Absalon.

Det skal understreges, at vi har at gøre med et meget stort internationalt forskningsfelt, som består af forskellige forskningsmiljøer med forskellige forskningskulturer som fx specialpædagogiske, psykologiske, psykometriske, sociologiske, fagdidaktiske, etnografiske, neurologiske og medicinske forskningsmiljøer. Vi har gjort det til en del af vidensopsamlingen at forsøge en brobygning, som mange steder i litteraturen anbefales, men sjældere effektueres.

Da der er meget lidt dansk forskning og udvikling på området, er det nødvendigt at hente viden internationalt, hvor vi har særligt fokus på det engelsksproglige. Vi har bestræbt os på så vidt muligt at oversætte engelske fagudtryk til en dansk betegnelse for at øge læsbarheden. De steder, hvor vi har været usikre på den faglige legitimitet, har vi medtaget den engelske betegnelse, men tilføjet dansk forklaring.

Undervejs gør vi opmærksom på, hvor vi indlægger egne kommentarer og vurderinger til den viden, vi præsenterer.

Vi indleder vidensopsamlingen med at beskrive de konsekvenser, et svagt præstationsniveau kan have i ungdomsuddannelser og senere i ens livsførsel og følger derefter op. Det følges op af en analyse af, hvilke afgrænsninger der findes om fænomenet matematikvanskeligheder. Afgrænsningen består både af definitioner og af overvejelser over omfanget af elever, der oplever eller er ramt af matematikvanskeligheder. Desuden præsenteres de i litteraturen mest anvendte forkortelser, såsom DD (Developmental dyscalculia) og MD (Mathematical difficulties).

Det næste hovedområde er forklaringer, der gives i litteraturen, på matematikvanskeligheder. De spænder vidt. Spændvidden vil vi her omtale som forskellige perspektiver til at forstå, hvorfor matematikken er så vanskelig for nogle elever. Det kan struktureres på forskellig vis. Vi har valgt at følge den nuancerede struktur fra den anerkendte svenske matematikdidaktiker Arne Engström (2000, 2003) med en opdeling efter forskningsdiscipliner i psykologi, i neurologi, i didaktik og i sociologi. Vi opfatter det som væsentligt at kende disse nuancer i potentielle baggrunde for, at elever har vanskeligheder i matematik. Væsentligt, fordi det kan være afgørende

for succes ved specialpædagogiske, didaktiske tiltag og andre typer tiltag, og væsentligt er det fra et demokratisk synspunkt at forstå baggrunden for elevens vanskeligheder.

Næste hovedområde er litteraturens mange typer anbefalinger til, hvad der kan gøres, og hvilke veje der kan gås knyttet til matematikvanskeligheder. Anbefalingerne angår forskellige samfunds niveauer og forskellige aktører, men størstedelen af litteraturen i denne vidensopsamling handler om individniveau og institutionsniveau. Der er tale om afprøvede tilgange til matematikundervisning i skolen, hvoraf nogle er begrundet i matematisk stof og matematiske processer, nogle er grundet i undervisningstilrettelæggelse og nogle er begrundet i generelle og specifikke kognitive processer som perception og hukommelse.

I litteraturen er der repræsenteret forskellige formål på elevniveau, mest udbredt handler det om forbedringer af aktuelle præstationer og fremtidigt beredskab inden for en række matematiske discipliner og facetter. I mindre udstrækning er der i litteraturen undersøgelser, hvor formålet er forandringer i motivationsformer, i arbejdsmåder, i holdninger til matematik og i selvopfattelser. Majoriteten af den udvalgte litteratur omhandler således tiltag i den eksisterende skole. Interessen kredser om elevkarakteristika, interventionernes kognitions-mæssige (såsom hukommelsesmæssige) og didaktiske tilgange, matematisk indhold i form af matematisk stof og matematiske kompetencer samt effekter af forskellig slags, typisk præstationer i test kort tid efter og længere tid efter, at interventionerne er afsluttet.

Som vist i vidensopsamlingen er matematikvanskeligheder et diverst fænomen med individuelle variationer begrundet i "the multiple components of the brain and the mind it constructs, the learning environment with which it interacts (physical, social, and instructional), and the individual differences and developmental status of the learner, languages spoken at school and home, and cultural differences" (Berninger & Dunn, 2014). På denne baggrund anbefaler vi, at danske initiativer fremover ikke alene undersøger 'hvad virker?', men også fokuserer på 'hvad virker for hvem?'. Vi anbefaler forskningsinformeret udviklingsarbejde med kvalitativ følgeforskning af enkeltelever og mindre grupper af elever (se mere i Kratochwill et al. (2019)).

Lena Lindenskov og Bent Lindhardt, maj 2023

1. Søgemetodik og vidensopsamling

Den systematiske søgning blev gennemført som en samsøgning i baserne Teacher Reference Center, ERIC, British Education Index, Education Research Complete, APA PsycInfo og Academic Search Premier.

De fire første baser kendetegnes ved primært at registrere forskning, der beskæftiger sig med forskellige aspekter af uddannelse og læring. PsycInfo er medtaget, da det blev formodet, at den kunne medtage noget om de psykologiske og kognitive problemstillinger i forbindelse med dette emne. Endelig blev Academic Search Premier inkluderet i søgeprocessen, da det er en mere tværfagligt orienteret base, men som også indeholder stof, der rammer ind i denne søgnings emneområde.

Søgningerne blev foretaget i januar og februar 2023.

Centrale keywords

I dansk og typisk i nordisk sammenhæng omtales vidensopsamlingens emne som ”elever i matematikvanskeligheder”. I den internationale litteratur bliver der typisk anvendt følgende betegnelser:

- Mathematical learning disorder / difficulties/ disabilities (MLD)
- Mathematical disorder / difficulties/ disabilities (MD)
- Developmental Dyscalculia (DD)
- Learning (LD) disorder – difficulties – disabilities in mathematics
- Low achievement (LA) in mathematics

Søgeproces

Det blev besluttet kun at søge i titel, abstrakt og emneordsfeltet for at øge præcisionen af søgningen, men også for at lette screeningsprocessen på baggrund af den begrænsede tidshorisont, vidensopsamlingen er underlagt. Ydermere blev det besluttet kun at medtage poster udgivet efter år 2000. Derudover begrænsede vi os til engelske eller danske/svenske/norske tekster.

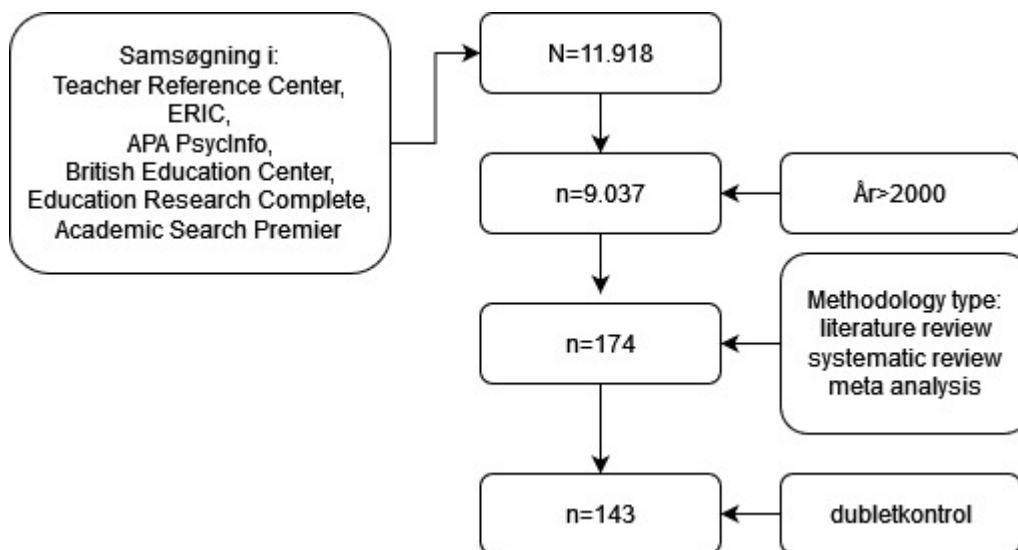
Dette førte på baggrund af ovenstående søgeord til følgende søgestreng, hvor de sammensatte ord er søgt som fraser og ordene er højretrunket.

```
( TI ( "math* learning disorder*" OR "math* learning difficult*" OR "math* learning disabilit*" ) OR
AB ( "math* learning disorder*" OR "math* learning difficult*" OR "math* learning disabilit*" ) OR
SU ( "math* learning disorder*" OR "math* learning difficult*" OR "math* learning disabilit*" ) )
OR ( ( ( TI math* OR AB math* OR SU math* ) AND ( TI ( "Learning disorder*" OR "Learning
difficult*" OR "Learning disabilit*" ) ) OR AB ( "Learning disorder*" OR "Learning difficult*" OR
"Learning disabilit*" ) ) OR SU ( "Learning disorder*" OR "Learning difficult*" OR "Learning
disabilit*" ) ) ) OR ( TI ( "Math* disorder*" OR "Math* difficult*" OR "Math* disabilit*" ) OR AB
( "Math* disorder*" OR "Math* difficult*" OR "Math* disabilit*" ) OR SU ( "Math* disorder*"
OR "Math* difficult*" OR "Math* disabilit*" ) ) )
```

Søgningen afslørede 9.037 hits.

For at reducere screeningsomfanget blev det vurderet, at screeningerne skulle foretages i de 108 litteraturreviews, der var i søgeresultatet, samt i de 39 metaanalyser og de 27 systematiske reviews, der også var en del af søgeresultatet.

Disse omfattede 174 poster, men da der var gengangere mellem flere af baserne, endte det reelle antal på 143 hits.



De supplerende søgeord var:

- LD/MD/MLD and consequences in daily life, further education, barrier, profession LD/MD/MLD and behavior - characteristics - students experience
- LD/MD/MLD and self concept, self efficacy, identitet, positionering, math anxiety, motivation
- LD/MD/MLD and parents - family - socioeconomic
- LD/MD/MLD and math anxiety

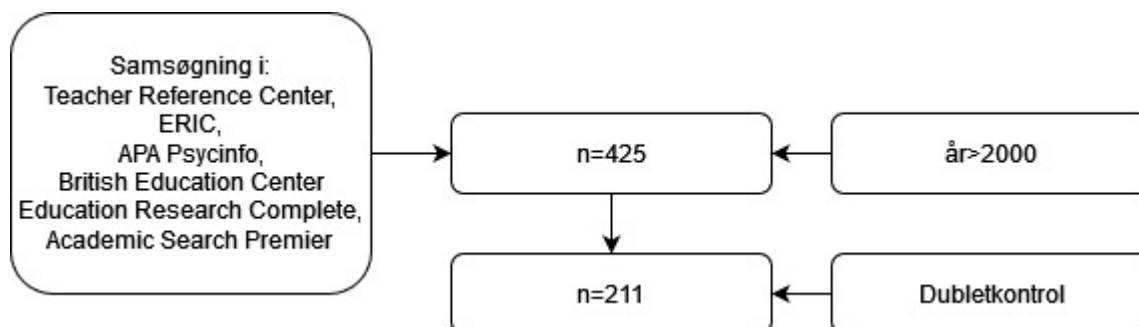
På baggrund af vidensopsamlingens tidshorisont blev det besluttet kun at søge på ord fra titelfeltet, hvilket førte til følgende søgestreng.

- TI ("consequences in daily life*" OR "further education*" OR profession* OR constraint*)
- TI ("self concept*" OR "self efficac*" OR identit* OR positioning OR "math anciet*" OR motivatio*)
- TI (parents OR famil* OR relative* OR socioeconomic* OR "socio-economic*")
- TI (behaviour* OR characteristic* OR "pupil experienc*")

Når disse fire søgestrengene blev kombineret med de oprindelige 9.037 henvisninger om matematikvanskeligheder, førte det til 425 henvisninger fra år 2000 og fremefter. Nogle af posterne var gengangere i flere baser, hvilket fik reduceret det endelige antal til 211, som blev screenet.

Kombinationen af de oprindelige 9.037 henvisninger med de 4 nye søgestrengene førte til 425 henvisninger fra år 2000 og fremefter.

Nogle af posterne var gengangere i flere baser hvilket fik reduceret det endelige antal til 211 som blev screenet.



I de seks udvalgte baser var der overraskende få nordiske forskningsartikler, som dukkede op. Derfor blev det besluttet at gennemføre søgninger i to danske baser samt en svensk og en norsk base.

Fra den danske nationalbase **Bibliotek.dk** blev der søgt på begrebet inkluderende matematikundervisning med følgende søgestrengene ((matematik*)) and (((inkluderende and matematikundervis*)) or (("inkluderende undervis*")))) hvilket ikke gav nogle henvisninger på anerkendt forskningsniveau.

Der blev også søgt i den danske forskningsdatabase **NORA** på hhv. (matematik*) AND ("inkluderende undervis*") samt ("inkluderende matematikundervis*") hvilket heller ikke tilføjede yderligere.

I den svenske forskningsdatabase **DIVA** blev der søgt på ("inkluderande utbildning" AND matematik*), hvilket gav 7 tidsskriftartikler og 3 doktorafhandlinger, hvor ingen af dem ramte dette projekts fokusområde.

Endelig blev der søgt i den norske forskningsdatabase **CRISTIN** på både ("inkluderende utdanning") og ("matematikkvansker AND matematikk"), hvilket gav ingenting af interesse.

Interview

Som supplement til litteratursøgningen blev der foretaget interviews eller mailkorrespondance med nogle centrale nordiske forskere inden for forskningsfeltet. Dette for at skærpe vores vidensopsamling ind i en nordisk kontekst.

Det drejer sig om:

Anette Bagger, Sverige.

Bagger er uddannet Doctor of Philosophy in Educational Work med speciale i matematik og er docent på Örebro Universitet. Hun har bygget og ledet specialpædagogisk forskningsmiljø SpecUL ved Örebro Universitet og er medlem af det nordiske SUM-netværk (Special Needs Education in Mathematics). Bagger har bidraget til antologier om specialundervisning og vurdering, både nationalt og internationalt.

Arne Engström, Sverige

Central person i svensk forskning om matematikvanskeligheder i de seneste 30 år. Medstifter og stadig aktiv i The Nordic Research Network on Special Needs Education in Mathematics (NORSMA).

Steve Chinn, England

Skoleleder for elever med dyskalkuli og dyslexi. Forsker og forfatter til adskillige artikler og bøger om elever i matematikvanskeligheder. Kendt og anerkendt foredragsholder internationalt om elever i matematikvanskeligheder.

Edda Óskarsdóttir, Island

Assiterende professor på Islands Universitet med særlig fokus på forskning inden for inklusion og matematik. Mangeårigt medlem af NORSMA.

Der vil være udvalgte pointer af interviewene, som indgår i vidensopsamlingen med navns nævnelse.

Litteraturen fra reviewene er suppleret med enkelte videnskabelige artikler, som vi som videnspersoner har kendskab til, som værende centrale ved belysningen af fænomenet "at være i matematikvanskeligheder". Artiklerne er udvalgt for at øge nuancen og dybden i de udvalgte temaer.

2. Hovedresultater

Vi vil i det følgende trække nogle hovedlinjer frem, som kan udledes af den forskning, vi har læst og analyseret inden for de sidste 23 år. Det skal indledningsvist bemærkes, at majoriteten af den litteratur, der i første omgang blev søgt frem, har omhandlet reviews af forskning af kvantitativ karakter og fra USA. Det giver en bias i forhold til danske forhold, og vi har derfor suppleret med anerkendte kvalitative studier også fra andre kulturkredse. For at få nordisk forskning repræsenteret har vi konsulteret nogle kernepersoner derfra.

Konsekvenser

Det er konsekvenserne af manglende matematiske kompetencer, der er begrundelsen for at investere overvejelser, tid, ressourcer, forskning og udvikling i området. Der er konsekvenser i mange kontekster i borgernes liv. Elevers manglende matematiske kompetencer har betydning for elevernes kommende arbejds-, hverdags-, uddannelses- og fritidsliv. Der er markant forskning, som underbygger de personlige og samfundsmæssige problemer en for ringe "mathematical literacy" indebærer. På det personlige plan er matematiske forudsætninger kritiske i moderne samfund og kan reducere jobmuligheder, udfoldelsesmuligheder i hverdagen og selvværd. På det samfundsmæssige plan er matematiske tankeformer og algoritmer kritiske, og deres implementering øver indflydelse på institutioner og virkemåder.

En afgrænsning

Forskningslitteraturen er bred og bl. a. præget af, at forskellige forskningsmiljøer som fx pædagogik, matematikdidaktik, sociologi, psykologi, psykiatri o.lign. har forskellige perspektiver på fænomenet at være et barn i matematikvanskeligheder. Der er således ikke etableret konsensus om, hvordan man skal afgrænse og definere vanskeligheder i matematik, og flere steder omtaler man dette forskningsfelt som et ungt forskningsfelt.

Definitioner på matematikvanskeligheder falder i to hovedgrupper og præsenterer forskellig slags viden om eleven og om handlemuligheder/veje at gå:

- Med de såkaldte diskrepans-definitioner og såkaldte prokura-definitioner iagttages elever, der er lavt præsterende, typisk ud fra standarder inden for matematikpræstationer og cut off punkter på statistiske fordelinger af elevers matematikpræstationer i forskellige test.
- Med kendetegns/symptom-definitioner bygges på viden om kvalitative forskelle hos elever i matematikvanskeligheder (herunder mulige subgrupper). Man undersøger således, hvilken adfærd og handlinger eleverne har, som korrelerer med deres matematikvanskeligheder.

Der skelnes mellem at have længerevarende eller midlertidige vanskeligheder i matematik. Her defineres længerevarende som år (ofte 2 år og mere) og midlertidige som uger og måneder.

Vi vurderer, at varigheden af matematikvanskeligheder er vigtig for at vælge hensigtsmæssige pædagogiske og matematikdidaktiske tiltag.

I kategorien længerevarende vanskeligheder indgår såvel elever med generelle indlæringsvanskeligheder (elever der ofte beskrives som værende flere år forsinket i deres udvikling) som elever med specifikke indlæringsvanskeligheder (elever der ofte beskrives som generelt kognitivt normalt præsterende men med specifikke kognitive udviklingsforstyrrelser fx ordblindhed og talblindhed).

Omfang

Der er flere kvantitative målinger, som kredser om, at ca. 15% af eleverne er i en eller anden form for vanskelighed i matematik, som giver anledning til bekymring. Det være sig såvel af midlertidige eller længerevarende grunde.

Der er flere internationale forskere, som beskriver omfanget af den specifikke indlæringsvanskelighed benævnt talblindhed til ca. 5-7%. De danske talblindeprojekter under Børne- og Undervisningsministeriet opererer med en "pure" (ren) talblindhed, som udelukker generelle læringsvanskeligheder, affektive faktorer, manglende undervisning eller sociologiske grunde. De kommer således frem til 1-2%.

Det kan dog diskuteres, om strategien "pure" talblinde er tilstrækkeligt retvisende – og tilstrækkelig omfangsrig – for de elever, som har brug for hjælp knyttet til talblindelignende symptomer. Talblindhed er således en særlig form for matematikvanskelighed af længerevarende karakter, og omfanget af elever ramt af talblindhed er mindre end omfanget af alle elever i længerevarende matematikvanskeligheder.

Der er to ledende internationale definitioner DSM 5 (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders er 5. udgave af den amerikanske diagnosemanual for psykiske lidelser) og ICD 11 (WHO's internationale klassifikation af sygdomme og andre helbredsrelaterede tilstande), som omhandler specifikke indlæringsvanskeligheder, og som tenderer den definition, som anvendes af projektgrupperne bag talblindeprojekter i det danske Børne- og Undervisningsministerium.

Årsager

Årsagerne til vanskelighederne kan både være iboende kognitive udviklingsforstyrrelser og være grundet i påvirkninger fra omgivelserne, som demotiverer, og der kan også være tale om samspil. Disse årsager kan skabe en modstand holdningsmæssigt mod at lære matematik og en ængstelse, som påvirker læringen af matematik, hvilket

forstærker vanskelighederne. Der tales således om et spektrum af flere faktorer, som leder i samme retning og med samme konsekvenser – at eleven ikke opnår tilstrækkelige matematiske kompetencer. Vi har valgt i vidensopsamlingen at anvende den mest anvendte kategorisering i Norden med fire perspektiver på matematikvanskeligheder: Psykologiske, sociologiske, neurologiske og didaktiske (Engström, 2000, 2003).

Psykologiske perspektiver beskriver en følelsesmæssig tilstand, der blokerer for læring. En følelsesmæssig tilstand som både kan være midlertidig men også så hæmmende, at det får karakter af længerevarende vanskelighed. Det kan som sagt eksistere i forskellige grader, og i værste tilfælde omtales det som matematikangst (math anxiety eller math fear). Vi omtaler det i denne vidensopsamling som matematikængstelse for at anerkende og inkludere en større gruppe af elever. Der peges på mangel på faglig selvtillid, manglede viljestyre og demotivation. Der er typisk en kønsforskel, hvor piger er mere påvirket af følelsesmæssige hæmmende årsager end drenge. Der er en socioøkonomisk slagside. Man peger bl.a. på, at negativ selvopfattelse har en ødelæggende virkning på matematikundervisningen. Omfanget af elever, som kommer i vanskeligheder i faget matematik grundet ængstelse og følelsesmæssig blokering, er ikke klart, men der er dog målinger som angiver nogle pejlemærker.

- Den danske TIMSS 2019-undersøgelse angiver, at ca. 30% af eleverne i fjerde klasse markerer, at de ikke kan lide matematik.
- Den danske PISA 2012-undersøgelse angiver, at ca. 19,7% af deltagende 15-årige elever bliver meget nervøse, og at 20,3% føler sig hjælpeløse, når de arbejder med matematiske problemer.

Man kan så spørge, hvorvidt ca. 30% og 20% er høje andele, måske for høje andele, for hvad kan andelen sammenlignes med? Relateret til andele i andre lande kan være problematisk. Man skal være påpasselig med at tolke internationale forskelle på selvrapporterede holdninger og følelser, såsom at kunne lide og at føle sig nervøs og hjælpeløs, fordi det er kulturelt afhængigt, hvad det er legitimt at give udtryk for. Historisk sammenligning i det samme land er mere relevant, og ifølge TIMSS er andelen steget fra ca. 20% i 2015 til ca. 30% i 2019. Ifølge PISA er andelen steget fra 15% og 17% i PISA 2003 til 19,7% og 20,3% i 2012. Vi må konkludere, at der ikke er nogen positiv udvikling at spore i danske elevers følelsesmæssige reaktioner på matematik, og vi vurderer, at de angivne andele er problematisk høje og angiver et behov for fokuserede indsatser (TIMSS, 2020; OECD 2004; OECD 2013).

Sociologiske perspektiver beskriver kulturelle og subkulturelle forhold, som skaber læringskomplikationer for eleven. Når vi ser på matematikundervisningen i lys af den kulturelle og sociale situation, finder vi forhold, som kan ekskludere elever og dermed skabe matematikvanskeligheder. Disse forhold angår tre slags forudsætninger for vellykket deltagelse og matematiklæring:

1. En rimelig god, generel sprogforståelse.
2. At kunne deltage i klassens kommunikation.
3. At knytte de matematiske problemstillinger sammen med kontekster eller sammenhænge, der ofte er baseret på hverdagssituationer, som det antages, at eleven har erfaringer med.

Alle undersøgelser om elever i Danmark viser forskelle i matematikpræstationer i forhold til etnicitet. I den udstrækning matematikvanskeligheder har betydning for matematikpræstationer, så må det konstateres, at der er etniske forskelle i mængden af elever ramt af matematikvanskeligheder.

Neurologiske perspektiver beskriver kognitive udviklingsforstyrrelser, som indgår i betegnelser som generelle læringsvanskeligheder og specifikke læringsvanskeligheder. Elever med generelle læringsvanskeligheder har ofte svært ved mange fagområder, som bl.a. kan begrundes i problemer knyttet til hukommelse, opmærksomhed, sprogforstyrrelser, ræsonnementspræstationer og visuelle/spatiale evner. Elever med specifikke læringsvanskeligheder er fx talblinde elever, som er en længerevarende specifik vanskelighed knyttet til manglende automatisering af tal, antal, størrelser samt fastholdelse og anvendelse aritmetiske færdigheder. Talblinde elever omfatter de elever, som er normalt begavede, men har dette færdighedsproblem. Både elever med generelle læringsvanskeligheder og elever med talblindhed forventes at være i gruppen af længerevarende vanskeligheder i matematik.

Didaktiske perspektiver

Didaktiske perspektiver på matematikvanskeligheder omhandler, hvordan undervisning øver indflydelse på, at matematikvanskeligheder opstår, manifesterer sig, vedligeholdes og forstærkes hos elever. De elementer i og omkring undervisningen, som kan have negativ indflydelse på elevernes muligheder for læring og motivation, opdeles i:

- Indhold og aktiviteter i undervisningen.
- Fagopfattelser i og omkring undervisningen.
- Læringsopfattelser i og omkring undervisningen.
- Lærerens orkestreringer af klasserum og elever.

Forældre

Vi fandt meget lidt forskning, som havde fokus på et forældreperspektiv. Enkelte forskere fremhæver, at forældres egen ængstelse over for matematik påvirker elever i negativ retning. Der peges også på, at feedback til forældre om deres lavt præsterende barn har et potentiale til at øge præstationsniveauet – dog med moderat effekt. Der peges på, at en sådan feedback skal være specifik, objektiv og ærlig samt omhandle detaljerede beskrivelser af succeser frem for af fejl og vanskeligheder.

Effekt og intervention

Der er i forskningen præsenteret mange forskellige interventioner målrettet elever i matematikvanskeligheder, hvor man har undersøgt effekten knyttet til deres matematikpræstationer. I en undersøgelse af en række matematikinterventioner gennem en årrække på 25 år for elever med matematiske indlæringsvanskeligheder fra 4. til 12. klasse forsøgte man at sammenfatte effekterne af matematikintervention på elevernes matematikudbytte. Undersøgelsen fandt en ekstrem variation i effekternes størrelse og retning. Det er således problematisk at tale om "hvad der virker" universelt, idet de elevgrupper, der er indgår i interventionerne, kan være udvalgt forskelligt og undersøgt i forskellige undervisningskulturer. Der synes dog visse fællestræk ved anbefalingerne.

Gersten et al. (2009) har således fra et antal undersøgelser samlet, hvad der har været anvendt i interventioner for elever i matematikvanskeligheder omtalt som MD (mathematical difficulties), MLD (mathematical learning difficulties) og DD (developmental dyscalculia):

- Direkte undervisning.
- Læring af generelle løsningsstrategier (heuristik).
- Brug af visuelle repræsentationer.
- Fokus på elevens sprogliggørelse.
- Brug af varierede eksempler.
- Løbende feed back.
- Kammeratskabslæring.

Det må understreges, at den omtalte forskning kun har begrænset fokus på relationelle og motivationsmæssige sammenhænge, såsom relationer til læreren og fixed/growth mindset.

Hjælpemidler – analoge og digitale

Der er varierende konklusioner på brugen af digitale hjælpemidler. Nogle peger på, at effekten sammen med en lærer er større end brug af digitale hjælpemidler, når det drejer sig om elever i matematikvanskeligheder. Andre fandt positive effekter ved en computerbaseret undervisning og endda større effekt hos elever i matematikvanskeligheder end hos normalt præsterende elever. Grundet den accelererende teknologiske udvikling, hvor lande og undervisning kan være meget forskellige på forskellige steder, er her givet et område, som skal undersøges specifikt i i egen digitale undervisningskultur, idet sammenligning og sammenfatning af de forskellige forskningsresultater fra andre lande og tider kan mangle pålidelighed.

Det er undersøgt, hvordan direkte undervisning og brug af computerbaseret undervisning forholdt sig til hinanden. Resultatet viser, at det centrale er, hvordan der

undervises og ikke hvilke "devices", der bruges. Man fandt, at selv om eleverne var engagerede i at arbejde med computerprogrammer, så kunne "det ikke slå interaktion med læreren".

Specialiserede computerbaserede interventioner beskrives som havende specifikke fordele for elever, lærere og forskere, idet computerbaseret dels muliggør reduceret træningstid og lærertilstedevær, dels muliggør individualiseret undervisning for den lærende, og dels muliggør en ønskværdig privat feedback.

Der er meget generel forskning, som viser, at elever i aldersgruppen 7 til 11 år får mere gavn af at bruge fysisk konkrete materialer end elever på 12 år og ældre. Men dette gælder ikke for elever i matematikvanskeligheder, hvor der ikke er målt signifikant læringsforskel ved brugen af konkrete materialer i forskellige aldre. På denne baggrund anbefales det at inddrage konkrete materialer til elever med vanskeligheder i matematik, uanset elevvalder. Det skal dog bemærkes, at der synes at være tendenser til, at elever med følelsesmæssige og adfærdsmæssige vanskeligheder får en svagere effekt ved brugen af konkrete materialer end elever i generelle og specifikke læringsvanskeligheder uden følelsesmæssige og adfærdsmæssige vanskeligheder.

Før skolen

Der er flere forskningsresultater, som angiver en ganske stor forudsigelighed om, hvorvidt børnehalebørns matematik har konsekvenser senere i skoleforløbet som matematikvanskeligheder. I en omfangsrig amerikansk undersøgelse er det påvist, at den stærkeste indikator for elevers senere "uddannelseskarriere" er deres talfærdigheder (numeracy) på børnehaveniveau. Der udestår en analyse af mulighedsrummet for, at tidlig indsats i dagtilbud knyttet til matematisk opmærksomhed kan forebygge matematikvanskeligheder.

Specialundervisning

Nationalt Center for Skoleforskning (NCS) foretog i 2015/16 en undersøgelse af specialundervisning i 13 kommuner, som omfattede knap 70.000 elever svarende til ca. 10% af eleverne i den danske folkeskole. Undersøgelsen viste, at elevgruppen med supplerende undervisning var lidt større end den gruppe, der tidligere fik specialundervisning som støtte til almenundervisningen.

Et andet vigtigt resultat var, at elever med støtte trivedes dårligere og især havde meget lavere tilpasning til skolens normer, selvkontrol, motivation og arbejdsindsats samt skolefaglige præstationer end elever uden støtte. Endelig havde deres forældre en svagere uddannelsesmæssig baggrund, og forældrene følte sig i mindre grad i stand til at hjælpe deres børn.

Den supplerende undervisning var mindst i børnehaveklasse/1.klasse med ca. 7%, mens den var størst på mellemtrinnet (3. - 5. klasse) med ca. 13%. (Egelund m.fl., 2017).

I den seneste opgørelse fra Danmarks Statistik 2022 er ca. 6% af elever fra grundskolen knyttet til segregeret specialundervisning (specialskoler, specialklasser m.m.). Der er tale om en lille stigning gennem de seneste år.

3. Konsekvenser

Det er blevet stadfæstet i forskellige sammenhænge, at det at lære matematik er af stor vigtighed for alle elever. Det må pointeres, at også for elever med vanskeligheder er det af stor vigtighed. En anden måde at sige det på er, at det er et alvorligt handicap at have læringsvanskeligheder (Duncan et al., 2007; Richie & Bates, 2013). Vigtigheden er begrundet i flere forhold:

- Matematisk tænkning indgår i arbejdsfunktioner verden over (Jitendra et al., 2018). Når vanskeligheder angår berørte 'skills', færdigheder og kompetencer som de matematiske, der er kritiske i moderne samfund (fx Duncan et al., 2007; Ritchie & Bates, 2013), så kan en 'developmental learning disorder' være et alvorligt handicap. Lavt udbytte influerer på mange forskellige livsaspekter og har negativ betydning for børns skoleudbytte, mentalt helbred og lavt selvværd (Fritz et al., 2019). For voksne reducerer det jobmuligheder (Rivera-Batiz, 1992) og muligheder for selvbestemmelse/ udfoldelsesmuligheder i hverdagens aktiviteter (Arcara et al., 2017; Benavides-Varela et al., 2015, 2017, 2020; Semenza et al., 2014).
- Ramaa & Gowramma (2002) påpeger, at der er bred konsensus om betydningen af matematik for at lykkes i livet ('success in life'): Matematiske begreber, logik, ræsonnement og analyse er afgørende for at klare hverdagens problemer. Kucian og von Aster (2015) anfører, at numerical skills er afgørende i hverdagen, og at ringe udvikling i talbehandling og beregning har negativ indflydelse på skole, erhvervskarriere og selvværd.
- Rubinstein (2009) påpeger at matematiske færdigheder og kompetencer 'skills' er fundamentale i de fleste samfund og af stor vigtighed. Dette gælder i forhold til den enkelte, og i forhold til samfundsmæssige arenaer, fx har det stor betydning for hvordan uddannelsessystem og sundhedssystem fungerer.

I dansk sammenhæng viser Arbejderbevægelsens Erhvervsråd (2021), at de "25-årige, der ikke har en ungdomsuddannelse, er kendetegnet ved, at de ofte er vokset op med flere udfordringer. Kun 1 ud af 14 har hverken helbredsmæssige problemer, dårlige karakterer fra grundskolen, massive sociale udfordringer eller svag hjemmebaggrund, mere end 1 ud af 2 har ikke fået mindst 2 i dansk og matematik, og 1 ud af 5 har helbredsproblemer" (side 2).

Særligt fremgår det, at manglende afgangsprøve i dansk eller matematik i 9. klasse samt at have fået under 2 i karakter, er netop de baggrundsforhold, der giver størst risiko for ikke som 25-årig at have fuldført mindst en ungdomsuddannelse (samt for ikke på trods af dette at have fuldført en videregående uddannelse). Ovenikøbet er risikoen større

ved manglende afgangsprøve i matematik end ved manglende afgangsprøve i dansk, og risikoen er større ved karakter under 2 i matematik, end ved karakter under 2 i dansk.

Som mere specifikke sammenhænge, hvor skoleresultater spiller en rolle, nævner Arbejderbevægelsens Erhvervsråd (2021), at "er man dreng vokset op hos en enlig, ufaglært mor i en almen bolig i København, så har man 75 procent chance for ungdomsuddannelse, hvis man altså også har fået mindst 2 i dansk og matematik, og man ikke har psykiske udfordringer. Er man dreng, der har været i psykiatrisk behandling, har været anbragt og ikke har afgangsprøven i hverken dansk eller matematik, så er chancerne for at have fået en uddannelse 23 procent" (side 11).

Arbejderbevægelsens Erhvervsråd (2021) nævner side 22, at "det handler også om, at der nogle gange er brug for særlige, målrettede indsatser for nogle børn. Børn, der har svært ved at følge med i dansk eller matematik, kan have brug for f.eks. intensive læringsforløb. Det handler også om at sikre de rette ressourcer i skolen for at sikre at alle børn har muligheden for at klare sig godt i skolen og videre på ungdomsuddannelserne." Der henvises til Rosholm m.fl. (2020), der har påvist, at det kan betale sig at investere i særlige læringsindsatser, og at indsatserne skal ses som et supplement til vores velfærdsmodel. En af de undersøgte indsatser er *Matematikindsats 2017: TMTM, Tidlig matematikindsats til marginalgrupper* i matematik i 2. og 8. klasse (Harder m.fl., 2020).

Fordi matematisk kunnen og kompetence har betydning for at fungere i moderne samfund, så lægges der vægt på matematik i uddannelsessystemer i hele verden i de aldre, hvor der er obligatorisk undervisningspligt. I OECD-sammenhænge er der på forskellig vis blevet formuleret bud på, hvad relevant matematisk kunnen og kompetence består af. Det er foregået i regi af PISA- og PIAAC-projekterne i en vekselvirkning mellem teoretiske ekspertovervejelser og empiriske undersøgelser.

I PISA-undersøgelserne omtaler man en persons funktionelle præstationsniveau i matematik som "mathematical literacy". Beskrivelsen oversat til dansk lyder: "En persons formåen til at formulere, udføre og fortolke matematik i en mangfoldighed af sammenhænge. Det omfatter at kunne ræsonnere matematisk og gøre brug af matematiske begreber, procedurer, kendsgerninger og redskaber til at beskrive, forklare og forudsige fænomener. Det er en hjælp til at erkende den rolle, som matematik spiller i verden og til at foretage og træffe velfunderede vurderinger og beslutninger som konstruktive, engagerede og reflekterende borgere." (OECD, 2013).

Tilsvarende formulerer man i PIAAC (Rosdahl, 2013) sig om det, som man her kalder for numeracy. PIAAC omhandler voksne mellem 16 og 65 år. Danske voksne deltog sammen med voksne fra 23 andre lande i en PIAAC-undersøgelse. Resultaterne blev offentliggjort 2013 (som det seneste resultat) og viste, at:

- Over 40% skal hver dag udføre en eller anden aktivitet, der indebærer talbehandling (*regning*), fx på lommeregner eller computer, ved beregning af priser, budgetter eller brug af procenttal (PIACC 2013).
- Næsten to tredjedele af de beskæftigede bruger hver dag *IT* på deres arbejde, fx e-mail, tekstbehandling eller regneark; 20% bruger regneark hver dag.
- Den hyppigste aktivitet er ”brug af lommeregner”, som 35,1% anvender hver dag enten i håndholdt form eller på computer. Hver dag arbejder 20,2% med brøker, procenter eller decimaltal, og 16,5% skal hver dag beregne priser, omkostninger eller budgetter.
- I den private sektor har jobbene hyppigere et indhold af regne- og IT-aktiviteter, end inden for det offentlige.

Der kan ikke fra PIACC påvises mange forskelle mellem kvinders og mænds arbejdsopgaver. Nærmere analyse viser dog, at mænds job sammenlignet med kvinders (alt andet lige) hyppigere indeholder læse- og regneaktiviteter.

Det er derimod slående, at der er forskelle mellem arbejdsopgaver for indvandrere og personer med dansk oprindelse. Når man i den statistiske model inddrager de målte kognitive færdigheder, viser det sig imidlertid, at forskellene enten bliver mindre (i forbindelse med planlægnings-, kommunikations- og skrive-opgaver) eller helt forsvinder (i forbindelse med læse-, regne- og IT-aktiviteter samt fysiske/manuelle aspekter).

At forskellene forsvinder kunne tyde på, at det er færdighederne snarere end indvandrerstatus, der har sammenhæng med arbejdets indhold. Det kan skyldes, at færdighederne udvikles gennem arbejdet, og/eller at allokeringen af indvandrere til bestemte typer job snarere er bestemt af indvandrernes færdigheder end af deres status som indvandrere.

PIAAC-respondenternes målte færdigheder korrelerer med social baggrund, også når der korrigeres for andre baggrundsvariable. Ligeledes er de målte færdigheder højere hos respondenter, hvor begge forældre har en lang videregående uddannelse, end hos respondenter, hvor begge forældre højst har en uddannelse på grundskoleniveau.

Blandt danske voksne måles 14,6%, svarende til 531.000 voksne, til at have hvad der beskrives som utilstrækkelige færdigheder. Disse utilstrækkelige færdigheder beskrives i PIACC i prosa-form, idet der er en udfoldet beskrivelse af en række færdighedsniveauer.

Steve Chinn (2023) refererer fra Storbritannien, at PIACC viser, at andelen med utilstrækkelige færdigheder er højere end 20%. Chinn tilføjer, at sådanne ringe færdigheder har direkte indflydelse på arbejdsproduktivitet og koster Storbritanniens økonomi £20.2 billion om året.

I den engelske rapportering af PIAAC ses det også, at voksne med bedre kompetencer har en tendens til at have højere indkomst. Dette gælder også, når man i beregningerne kompenserer for uddannelse, alder, køn, indvandrerstatus og antal år på arbejdsmarkedet.

Mike Ellicock, en social entreprenør og stiftende administrerende direktør for National Numeracy, en uafhængig britisk velgørenhedsorganisation fra 2012, udtaler: "What we all need in daily life is quite simple maths, but we also need a conceptual understanding applied to complex situations." [Vor oversættelse: "Det, som alle behøver af matematik, er, hvad der af matematikkyndige fagfolk ses som relativ enkel matematik, men der er også brug for en dyb forståelse af det enkle anvendt i komplekse situationer."]] (BBC, 2018). Hvis dette mangler, giver det mere end dobbelt så stor risiko for arbejdsløshed. Både i OECD og UK-rapporter ses en klar korrelation mellem ringe færdigheder og helbredsproblemer.

Endelig vil vi med Powel et al. (2021) minde om, at hensigten med at foranstalte og undersøge forskellige interventioner er at skaffe viden til forbedret støtte af læring hos elever med matematikvanskeligheder, fordi det er samfundsmæssigt og personligt relevant. Powel et al. viser med data fra deres egen amerikanske kontekst, at det er vigtigt med forbedringer, når 68% af 8. klasses elever med en identificeret læringsvanskelighed i matematik præsterer under, hvad der betegnes som grundlæggende niveau. For elever uden identificeret læringsvanskelighed drejer det sig om 25%. Tilsvarende data på 4. klasses elever er 50% over for 14%.

4. En afgrænsning af fænomenet

Der er i forskningen ikke konsensus om, hvordan man skal skelne mellem elever, som er normalt præsterende og elever, som har så anderledes et præstationsniveau, at det kræver en særlig opmærksomhed. Diskussionen om en sådan afgrænsning bevæger sig typisk mellem to poler, der påvirker de problemstillinger og hypoteser, som forskningen tager udgangspunkt i.

Den ene pol udgør forskning som problematiserer diagnose- og kategoriseringstænkningen, fx udtrykt i New Diversity Movement omtalt som DEI (diversity, equity and inclusiv), hvor udfordringer i matematik i højere grad bliver tænkt som en naturlig del af en mangfoldighed og som en af flere variationer i klasselokalet.

Den anden pol (den typiske) er forskning, som forsøger at forstå matematikvanskeligheder gennem bedre målinger og raffinerede korrelationer for at blive endnu mere præcis i kategoriseringen af vanskeligheder, deres sammenhænge og mulige subgrupper.

Diskussionen har ofte rødder i forskellige forskningssektorer, hvor den ene fortrinsvis optræder i didaktiske/pædagogiske artikler, og hvor den anden ofte er fremtrædende i forskning med neurologiske/psykologiske perspektiver (interview med Bagger, 2023).

Det er vores opfattelse, som er i overensstemmelse med The Nordic Research Network on Special Needs Education in Mathematics (NORSMA), at man bør bygge en hensigtsmæssig bro mellem de forskellige poler. NORSMA er den nordiske organisation, som på netværk-niveau samler forskere og udviklere inden for problemstillinger knyttet til elever i matematikvanskeligheder. Dette sker blandt andet ved 2-årige konferencer. Baggrunden for denne holdning er et ønske om at skabe en passende operationel beskrivelse, som kan fungere i den virkelighed, eleven, forældrene og skolen agerer i. Tager man således udgangspunkt i praksis, så er der brug for en forståelse og anerkendelse af den store variation, der kan være blandt de enkelte elevers vanskeligheder, men der er også brug for en indsigt i, at der (trods alt) er visse fælles træk ved vanskelighederne, som dermed formindsker kompleksiteten og øger overskueligheden. I den udstrækning, der er behov for særlig fokuseret hjælp og ressourcer til bestemte elever, er der ofte behov for afgrænsning af elevers vanskeligheder for at kunne opfylde systemets krav om en eller anden form for "autoritativ" dokumentation.

I forskningsmæssige sammenhænge anvendes sædvanligvis tre forskellige tilgange til en definition (Ostad, 2007):

1. I diskrespans-definitioner sammenlignes en variation i elevens præstationer i forhold til en standard. Det kan være standarder ud fra 'gængs' alderssvarende

matematikpræstation. Det kan fx være standarder ud fra hvilke matematikpræstationer, som kan forventes i relation til personens IQ. Det kan være standarder ud fra hvilke matematikpræstationer, som kan forventes i relation til personens præstationer i andre skolefag. Det har tidligere været (og er det måske stadig) sædvanlig praksis i PPR-regi at anvende sådanne målinger. I Norge har det været praksis i PPR-institutioner at sammenligne WISC (Wechsler Intelligence Scale for Children – en almindelig brugt test af skolepsykologer til vurdering af børn og unges kognitive evner og en matematikfaglige test (Lunde, 2012)) – for at undersøge muligheden for, at eleven havde specifikke læringsvanskeligheder i matematik. Vi har pt. ikke præcist kendskab til praksis i PPR i Danmark.

2. I prokura-definitioner afgrænses matematikvanskeligheder til et nærmere angivet matematisk færdighedsniveau (Mazzocco & Thompson, 2005). Her omfatter definitionerne de elever, som fx scorer lavest på standardiserede/nationale tests. Der er således tale om en statistisk kvantitativ afgrænsning (cut-off). Her vil valg af test og cut-off punkter definere vanskelighederne. Beskrivelsen af elever i matematikvanskeligheder vil således afhænge af det valgte cut-off punkt.
3. I kendetegns/symptom-definitioner bygges på viden om kvalitative forskelle hos elever i matematikvanskeligheder (herunder mulige subgrupper). Man undersøger således, hvilke adfærd og handlinger eleverne har, som korrelerer med deres matematikvanskeligheder. Hensigten er at afdække faktorer, der måske kan sættes ind i en årsagssammenhæng. Eksempler er nedsatte hukommelsesfunktioner, uhensigtsmæssig lagring af viden, svage regnestrategier, svage internaliserede sprogfunktioner, begrænset vidensmængde og en kvalitativ forskellig udvikling af matematisk viden og færdigheder fra udvikling, som den ses hos de fleste (Ostad, 2007).

Ved brug af en prokura-definition kunne man i dansk sammenhæng lade nationale bedømmelser indgå, som f.eks. aktuelle former for nationale test og aktuelle afgangsprøver og eksamensopgaver. Men det er utilstrækkeligt grundlag for tilrettelæggelse af fokuseret støtte til elever, hvorfor der må suppleres med andre informationskilder.

Et andet princip der anvendes, angår hvor langvarige vanskelighederne er. Det er påvist af Nelson & Powell (2018), at elever med matematikvanskeligheder gennem skoletiden forbedrer matematikpræstationer, men præstationerne er til stadighed lavere end hos elever uden matematikvanskeligheder. I den udstrækning man identificerer matematikvanskeligheder gennem matematikpræstationer gennem skoletiden, konstaterer Nelson & Powell, at denne diagnose for mange elever vil være stabil.

Vi foreslår derfor, at man skelner mellem elever, som:

- Er i *midlertidige* vanskeligheder. De betegnes LA (Low Achievement), hvor det midlertidige er at regne i dage, uger og måneder.
- Er i *længerevarende* vanskeligheder, hvor det længerevarende regnes i år. Det indbefatter betegnelser som:
 - MLD (Mathematical Learning Disabilities /Disorders/Difficulties) eller DD (Developmental Dyscalculia). De er begge betegnelser på *specifikke vanskeligheder* (Specific Disorder). Det indbefatter talblindhed.
 - LD (Learning Disabilities/Disorder/Difficulties). Elever med LD vil typisk være at betragte som elever med *generelle læringsvanskeligheder*, der omfatter mange sider af læring i grundskolen. Læringsvanskelighederne påvirker ikke kun matematik, men også fagfelter hvor matematik ikke anvendes i stor udstrækning.

I forskningslitteraturen anvendes også betegnelsen MD (Mathematic Difficulties) i et forsøg på at undlade for mange differentieringer i fx LD, MLD og DD. MD er således et bredere begreb, der omfatter alle elever med svage præstationer i matematiktest upåagtet, at der kan være flere årsager til dette. I valget af betegnelsen MD ligger der bl.a. en afgrænsning af matematikvanskeligheder ved at anvende en cut-off score som fx en percentil-score, standardafvigelse el.lign uden at forholde sig til, hvorfor eleverne er i vanskeligheder. Ved brug af MD ser man også ofte bort fra adskillelsen længerevarende og midlertidige vanskeligheder (Powell et al., 2020).

Specielt i den kognitive-neurologiske forskning har der været et stort fokus på såkaldte *specifikke vanskeligheder* i matematik, hvor fænomenet talblindhed kan henføres til (Developmental Dyscalculia eller blot DD). Der er to verdensledende definitioner:

- DSM 5 (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders) udgives af American Psychiatric Association (APA), som er verdensledende og fremstiller forskningsbaserede diagnoser, som løbende justeres.
- ICD 11 (International Classification of Diseases and Related Health Problems) er FNs organisation WHO, som også løbende udvikler diagnoser, herunder bl.a. Specific disorder of arithmetical skills.

I dansk regi har arbejdsgruppen bag det ministerielle Talblindeprojekt (Lindenskov m.fl., 2018) gennem analyser af forskellige internationale definitioner foreslået denne udgave:

Talblindhed/dyskalkuli er en læringsudfordring, der er påvirket af en specifik kognitiv funktionsnedsættelse, som kan have forskellige udtryk, men som ikke kun kan forklares på baggrund af generelle indlæringsvanskeligheder, mangelfuld undervisning, psykologiske eller sociologiske årsager. Talblindhed/dyskalkuli omfatter vanskeligheder ved at automatisere tal, antal og størrelser samt fastholde og anvende aritmetiske færdigheder.

En mulig model:



Affektive og holdningsmæssige faktorer betyder også noget

Det har længe været et kendt fænomen, at matematik kan fremkalde stærke negative og angstprovokerende følelser, som på engelsk er navngivet ved termen 'math anxiety' og bl.a. er defineret af den amerikanske kognitive psykolog Mark H. Ashcraft som: "*a feeling of tension, apprehension, or fear that interferes with math performance*" (2002, p.181). Sædvanligvis angives math anxiety på dansk til 'matematikangst', hvilket kan synes for fobisk en beskrivelse. Vi gør os derfor til talsmænd for, at fænomenet i højere grad omtales som en 'ængstelse' og en 'vægning'. I Ashcrafts review af 51 forskningsartikler fremgår det, at math anxiety er relateret til ringe matematikpræstationer og giver negative holdninger over for faget (Ashcraft, 2002).

Der er udviklet flere forskellige spørgeskemaer og skalaer knyttet til math anxiety. Det mest benyttede synes at være AMAS (Abbreviated Math Anxiety Scale) og deraf efterfølgende kortere udgave mAMAS (Modified Abbreviated Math Anxiety Scale). Vi vurderer, at mulige overvejelser om at lade sådanne målinger indgå systematisk i Danmark, må kalde på kritisk analyse, så en sådan skala og spørgsmål tilpasses dansk undervisningskultur. Ængstelighed og vægning kan både være et resultat af kognitive vanskeligheder men også et resultat af påvirkninger fra elevens nærmiljø. Det centrale er, at den medfølgende demotivation over for faget kan være så stærk, at der er tale om eleven er i længerevarende matematikvanskeligheder.

Fra den danske skoleverden kan nævnes betegnelsen 'matematikhuller' eller 'regnehuller' (på engelsk 'math holes' som overgribende begreb for matematikvanskeligheder fra matematikdidaktikerne Peter Weng og Lena Lindenskov. Betegnelsen matematikhuller angiver en anden afgrænsning end den internationale betegnelse *specifikke vanskeligheder i matematik*. Betegnelsen matematikhuller kan omfatte enhver elev (også velpræsterende elever). Udtrykket matematikhuller er valgt,

fordi det knyttes til metaforen om matematik som et landskab med bakker og dale, hvor undervisningen ses som at lede eleverne igennem dette landskab. Betegnelsen kan også metaforisk knyttes til, at der i landskabet kan skabes huller i løbet af undervisningen, så læringen går i stå, og eleven ofte ikke kan komme i gang igen uden specifik støtte fra en lærer. Læreren må vurdere, om man skal søge at fylde hullet op, at kompensere (lægge bro hen over hullet), eller – for en tid – at gå andre veje i landskabet uden om hullet. Med denne tilgang er årsagsforklaringer og risikofaktorer oplysende, og deres indvirken skal søges kompenseret, så alle elever gives tilpassede muligheder for at lære matematik uanset oprindelsen af vanskelighederne (Lindenskov & Weng, 2006).

Også fra den danske skoleverden kan nævnes betegnelsen 'matematikspecifikke indlæringsvanskeligheder' (på engelsk: 'mathematics specific learning difficulties' eller 'genuine learning difficulties in mathematics') fra matematikdidaktikerne Uffe Jankvist og Mogens Niss. Betegnelsen matematikspecifikke indlæringsvanskeligheder angiver en anden afgrænsning end den internationale betegnelse *specifikke vanskeligheder i matematik*. Betegnelsen matematikspecifikke indlæringsvanskeligheder omfatter motiverede elever, som bruger tid på at lære matematik. De omfattede elever er uden kognitive vanskeligheder og uden vanskeligheder i fag, der ikke indeholder betydelige matematiske elementer. Disse elever har således kun har vanskeligheder i matematik, og når andre fag anvender matematik. Med denne tilgang fokuseres på matematikfaglige årsager og på at overkomme disse. De matematikfaglige årsager består af en række opfattelser og forståelser hos eleverne som betegnes som misforståelser, fejlfortolkninger, forkerte procedurer og som utilstrækkelige overbevisninger om, hvad matematik og matematiklæring er (Jankvist & Niss, 2015, 2020).

Omfang af elever i matematikvanskeligheder

Omfanget af elever i matematikvanskeligheder er betinget af de valgte definitioner og afgrænsningsvalg. Det betyder, at man i forskningsartikler finder omfang af elever i matematikvanskeligheder, der strækker sig fra 1% til 48% (Lunde, 2008).

I vores målsætning om en dansk operationel model, har vi udvalgt en række nøgletal, som kunne være retningsgivende:

Hvorfor 15%?

Ser man på tal fra den internationale matematiktest PISA, har der fra 2002 og til i dag været i gennemsnit omkring 15% af de 15-årige i Danmark, hvor besvarelsesniveauet (niveau 1 og under niveau 1) gør det legitimt at tale om elever er i matematikvanskeligheder (VIVE, 2019).

I den svenske Medelsta undersøgelse (Engström & Magne, 2003) undersøgte man besvarelsen hos de 15% af 9. klasses eleverne på en årgang, der scorede lavest ved

afgangsprøven i matematik. Det blev gjort tre gange med flere år mellem, og hver gang konstaterede man en præstation, som i gennemsnit svarede til middelgode elever i 4. klasse. Den samme undersøgelse er ikke foretaget i Danmark. Da det er en valgt procentsats, kan der være flere elever med et præstationsniveau, som bør vække bekymring, men det er vores vurdering, at undersøgelsen indikerer, at procentsatsen på 15 ikke er for høj.

I den danske undersøgelse af voksnes regnefærdigheder, PIAAC, var resultatet, at ca. 15% af danske voksne beskrives som havende utilstrækkelige regnefærdigheder (Rosdahl et al., 2013).

Subgrupper

Forekomsten af subgruppen dyskalkuli/talblindhed beskrives ofte i den internationale forskning til at være 5-7%. For eksempel testede Gross-Tsur et al. (1996) 3.029 israelske børn i fjerde klasse og opdagede dyskalkuli ved hjælp af to hovedkriterier: (1) at have en intelligens inden for det normale område og (2) at score på en matematiktest lavere end den gennemsnitlige præstation opnået af børn 2 år yngre (dvs. børn i anden klasse). De fandt, at 6,5% af børnene opfyldte disse kriterier.

Tilsvarende identificerede man (Morsanyi et al., 2018) i en undersøgelse af 2.421 grundskolebørn længerevarende og alvorlige vanskeligheder med matematik i 6% af stikprøven, som blev beskrevet som værende DD – developmental dyscalculia.

Det er vores vurdering, at man bør overveje, i hvor høj grad andre medfølgende læringsvanskeligheder skal indgå i afgrænsningen. Der er fx flere forskere som bemærker en øget hyppighed blandt ordblinde, som har talblindelignende kendetegn. Der nævnes en faktor 2 større sandsynlighed for at være talblind, hvis man er ordblind – og der nævnes tal fra 20-70% af ordblinde, som også er i risiko for talblindhed (Powel et al., 2020).

Der nævnes derudover, at 2/3 af de talblinde (von Aster & Shalev, 2007) også har andre vanskeligheder, som kan påvirke læringen i matematik. Der tales derfor om, at kun ca. 2% kan betragtes som 'rene talblinde', hvilket er i god overensstemmelse med det danske talblindeprojekt, som opererer med 1-2% (Lindenskov m.fl., 2018). Der kan argumenteres for at øge denne procent ved at inddrage såkaldte andre kognitive årsager som fx svag arbejdshukommelse og ordblindhed, så det snarere er 3-4%.

Vedrørende omfanget af elever med matematikængstelse viser PISA-undersøgelsen 2012 (VIVE, 2019) at:

- 38,6% af de 15-årige danske elever ofte bekymrer sig for, om matematikundervisningen vil være svær for dem.

- PISA 2012-undersøgelsen viste, at ca. 20% elever i Danmark blev meget nervøse, og at ca. 20% elever i Danmark følte sig hjælpeløse, når de arbejdede med matematiske problemer.

5. Perspektiver på årsagssammenhænge

Forklaringer, der gives i litteraturen, spænder vidt. Spændvidden vil vi her omtale som forskellige perspektiver til at forstå, hvorfor matematikken er så vanskelig for nogle elever. Arne Engström (Engström, 2000, 2003) har forsøgt at kategorisere årsagssammenhænge gennem følgende perspektiver:

- Psykologiske
- Sociologiske
- Neurologiske
- Didaktiske

Vi opfatter det som væsentligt at kende disse nuancer i potentielle baggrunde for, at elever har vanskeligheder i matematik. Væsentligt, fordi det kan være afgørende for succesen ved specialpædagogiske, didaktiske tiltag og andre typer tiltag, og væsentligt for at forstå eleven ud fra et demokratisk synspunkt. Det vil vi uddybe nærmere i det næste.

Psykologiske perspektiver

Forskningen har undersøgt forskellige problemstillinger inden for det psykologiske perspektiv på matematikvanskeligheder. Her har man blandt andet anvendt generelle psykologiske variable, som på engelsk betegnes som 'intrinsic motivation', 'self-efficacy', 'self-esteem', 'self-concept', 'attributions', 'affect', 'expectancy for success', 'confidence', 'academic confidence', 'emotional disorder', 'learning resistance' og 'learning blockages'. Der er også anvendt matematikspecifikke variable som nævnt i det foregående som math anxiety og math fear. Det er variable, der i større og mindre grad indgår i internationale og nationale sammenlignende undersøgelser. Nogle af disse studier opridser vi i det følgende.

Med 'self-efficacy' forstås selvtillid i forhold til bestemte angivne aktiviteter. Det er væsentligt at føle tiltro til, at man kan for at sætte i gang (Bandura, 1994). Det anses som en forudsætning for motivation, samtidig med at self-efficacy kan vokse eller skrumpes som følge af oplevelse af succes og fiasko. Derfor bruges self-efficacy af og til som mål på interventioners effekt. Self-efficacy har også sammenhæng med selvregulering (Zimmerman & Risemberg, 1997). Selvregulering aktiverer elevernes aktive kognition og adfærd i læringsprocessen. (Harris & Graham, 1999) viser, at faglige præstationer for elever i læringsvanskeligheder ofte kan tilskrives begrænsede selvreguleringsfærdigheder.

Linnanmäki (2007) peger på, at negativ selvopfattelse har en ødelæggende virkning på matematikundervisningen. Bishara (2022) viser, at faglig selvopfattelse repræsenterer en af

de vigtigste prædiktatorer for skolepræstationer, hvilket også påvises hos Hattie (2009) og Steinmayr & Spinath (2009).

Shalev et al. (1995) understreger i deres undersøgelse, at elever med dyskalkuli har flere adfærdsproblemer end normalt præsterende elever. Sammenlignet med ordblinde ses der flere 'attentional problems and externalizing syndromes'. Myklebust (1975) påviser, at elever med dyskalkuli trækker sig socialt (social withdrawal). Stein & Hoover (1989) sammenligner 'manifest anxiety' hos elever med og uden læringsvanskeligheder (LD). De viser, at LD-elever har højere anxiety. Levine et al. (1992) pointerer, at mens barnet udvikler et voksende og mere differentierende nervesystem, så giver kravene i matematikundervisning voksende belastning af nervesystemet. Elever med matematikvanskeligheder oplever ofte følelser af sorgfuldhed ('sadness') og af ikke at slå til intellektuelt. Det kan betyde, at selvværd og faglig motivation eroderer. Sådan et barn kan blive sensitiv og endog fløv, når forældre prøver at hjælpe med lektier (ikke påvist i danske undersøgelser). Prior et al. (1999) understreger risikoen for, at før-teenagere med matematikvanskeligheder internaliserer problemerne i form af anxiety, depression og fobi.

Ashcraft & Krause (2007) fastslår, at megen psykometrisk forskning viser klare tendenser angående konsekvenser ved matematikængstelse. Har man matematikængstelse, undgår man matematik som f.eks. valgfrie matematikmoduler på amerikanske high schools og colleges, og andre moduler som indeholder matematik og karriereveje med matematik. En sådan undgåelse betyder, at man går glip af potentielle læringsmuligheder, og resultatet er mindre matematisk udbytte. Ligeledes klarer en person sig dårligere ved test, når personen har matematikængstelse, og matematikængstelse influerer negativt på arbejdshukommelse. Man kan sige, at stor matematikængstelse fungerer som ekstra opgave ved siden af matematikopgaven. Ængstelsen fungerer som en ressourcekrævende sekundær opgave.

Matematikængstelse læres ifølge Ashcraft & Krause i klasseværelset – f.eks. når en elev ved tavlen klarer sig dårligt og bliver fløv over for lærer og kammerater. Kort fortalt, så er elever med under-gennemsnitlig matematikpræstationer og/eller svag arbejdshukommelse i risiko for at blive fløve i offentlige situationer. Der er risiko for, at en ikke-støttende lærer udvikler matematikængstelse hos eleverne. Når ængstelsen er startet, synes den at blive understøttet af en række kulturelle opfattelser, såsom at matematik er svært, enten kan man matematik eller ikke uafhængigt af indsats. Turner et al. (2002) viser, at hvis elever har en ikke-støttende "kold" lærer, så undgår eleverne øjenkontakt med læreren. Et amerikansk studie viser, at der blandt studerende til at blive lærere i grundskolen er en relativ høj grad af matematikængstelse (Hembree, 1990). Beilock et al. (2010) påviser, at kvindelige læreres matematikængstelse påvirker deres pigeelevers præstationer, og Heyde et al. (2020) påviser, at læreres opfattelse af 'fixed mindset' giver lavere indre motivation hos lavtpræsterende elever.

Et fixed mindset forudsætter, at evner er medfødte, og at man derfor enten har det eller ikke har det. Personer med et fixed mindset er således overbevist om, at det er vores medfødte evner, der afgør vores succes. Derfor spiller indsats for dem en ligegyldig "birolle".

Personer med 'growth mindset' opfatter evner som dynamiske og tror på, at de kan udvikles og kultiveres gennem øvelse og vedholdenhed. Denne pædagogiske teori er udviklet af den amerikanske psykologiprofessor Carol Dweck.

Ifølge forskning fra University of Chicago er matematikængstelse ikke en følelse, som kun opstår ved at arbejde med matematik. Forskningen konstaterer, at alene forventningen eller tanken om at løse matematiske opgaver forårsager symptomer på matematikængstelse (Beilock, 2019).

I et norsk studie af opfattelsen hos otte ungdomsskoleelever hedder det i opsamlingen: *"Det er selvsagt mange årsaker og ikke minst ulike årsaker fra elev til elev, men studien viser at noen faktorer er mer sentrale enn andre for denne negative utviklingen. Studien viser blant annet, at elevenes identitet som lærende i matematikk kan ha sentral betydning for deres prestasjoner"* (Røsseland, 2011).

Røsseland udvalgte otte elever, som opnåede gode resultater i den nationale test på mellemtrinnet (norsk mellemtrin), men som præsterede meget lavt til den nationale prøve på 8. klassetrin (norsk 8. klasse). Der har således været tale om en form for stagnation i udviklingen. Resultatet af interview og observationer var, at den enkeltfaktor, som betød mest for præstationsniveauet, var den faglige selvtilid.

	Kan meget godt lide	Kan lide	Kan ikke lide
Danmark			
2019	27,8 (1,2)	41,3 (1,1)***	30,9 (1,1)***
2015	37,6 (1,4)***	41,6 (1,1)	20,8 (1,1)***
2011	37,0 (1,3)***	42,1 (1,0)	20,9 (1,1)***

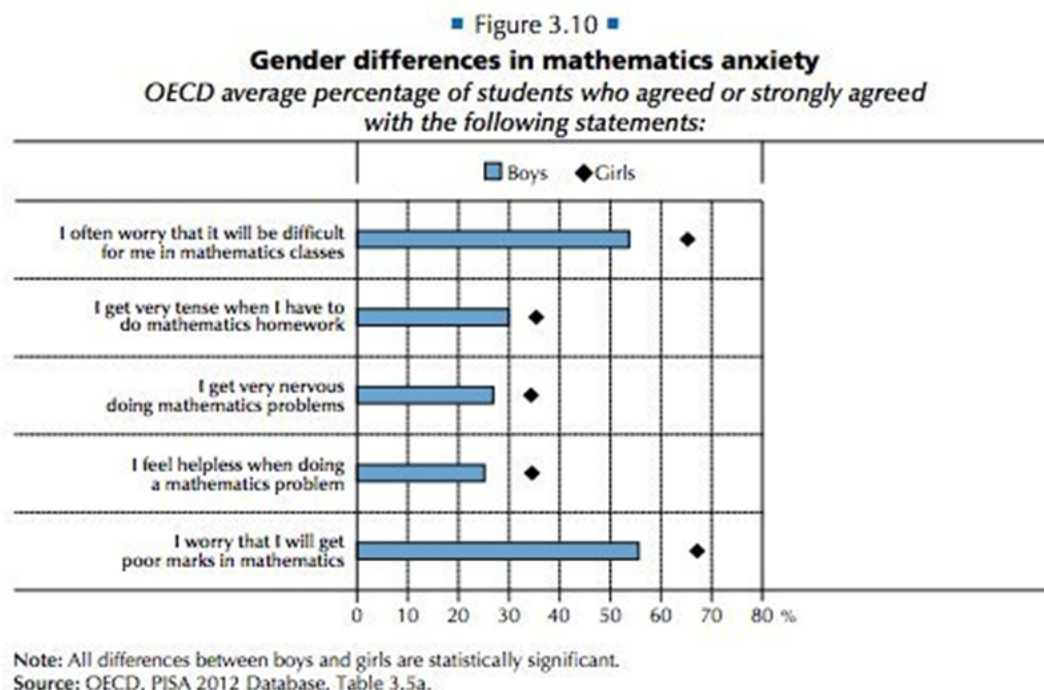
Fra rapporten TIMSS 2020, side 262, tabel 8.6

Som det kan ses af tabellen er der sket en stigning i antallet af elever fra 2015 til 2019, som ikke kan lide at lære matematik – fra ca. 21% til ca. 31% – hvilket er en stigning på 10 procentpoint (TIMSS, 2020).

Et flertal af engelske udskolings elever med høj matematikængstelse beskriver, at deres ængstelse voksede, når deres opgaver blev sværere. Der lå således en forventet uro, om de kunne løse den efterfølgende opgave. Det omfattede også forvirring ved at blive undervist af flere lærere, frygt for at blive hånet af kammerater og ikke at føle sig "klar"

til det, de opfatter som hårdere arbejde på "næste trin". Det skal betones, at undersøgelsen forholder sig til engelsk skolekultur (Carey, 2019).

Der er en tydelig forskel på, hvordan matematikængstelse påvirker henholdsvis drenge og piger – hvor flere piger end drenge generelt internationalt udtrykker ængstelighed over for faget (OCED, 2013).



I en undersøgelse af Beilock (2010) af 17 første- og andenklasser lærere og 52 mandlige og 65 kvindelige elever i USA, fandt man ud af, at kvindelige læreres matematikængstelse påvirkede pigers, men ikke drenge matematiske præstationer.

En undersøgelse fra 2011 viste, at elever, der fik mulighed for at reflektere over deres bekymringer med udtryksfuld skrivning før en høj-profileret eksamen, oplevede væsentlige forbedringer. Den simple opgave at nedskrive bekymringer ser ud til at have betydning – især for studerende med hyppig testangst (Ramirez, 2011).

I interview peger Annete Bagger (docent på Örebro Universitet i Sverige) på, at det er væsentligt at overveje, hvordan man evaluerer sine elever, idet det kan have negative følgevirkninger. Hun nævner forskningen af Klapp (2014):

700 elever fra 6. klasse blev udsat for den samme test. Halvdelen af eleverne fik at vide, hvilket testresultat de havde fået, og resten fik ikke noget at vide. Et år senere testede man alle eleverne igen og sammenlignede de to grupper.

Konklusionen blev, at blandt de, der havde fået resultatet af første test at vide, havde de bedste 6% steget i resultat i den anden testgruppe. De elever, der havde fået at vide, at

de havde dårlige resultater, scorede endnu dårligere end kontrolgruppen. Midtergruppen havde ikke rykket sig.

Elever med stærkere socioøkonomisk baggrund har signifikant højere grader af self-efficacy (tro på egne faglige evner) og growth mindset end elever med lavere socioøkonomisk baggrund. I målingen af growth mindset hos 15-årige i PISA skiller danske elever sig ud ved at have det næsthøjeste niveau (75%) af alle de deltagende lande i PISA, kun overgået af estiske elever. Danske drenge har en gennemsnitlig større tiltro til egne evner og en mindre frygt for at fejle end danske piger. Danmark er det land, hvor kønsforskellen er næststørst i forhold til frykten for at fejle. (VIVE, 2019).

Sociologiske perspektiver

Man har undersøgt forskellige problemstillinger inden for det sociologiske perspektiv på matematikvanskeligheder. Her har man blandt andet anvendt traditionelle sociologiske baggrundsvariable som socio-økonomisk status, etnicitet, sprog talt i hjemmet, køn og geografiske orienteringer som land-by og nationale områder. Det er variable, der i større og mindre grad er indgået i internationale og nationale sammenlignende undersøgelser og i teoretiske og empiriske undersøgelser af specifikke problemstillinger.

I Danmark er der betydelige geografiske forskelle på det målte udbytte af matematik i grundskolen. Det fremgår bl.a. af data fra 2019 (Arbejderbevægelsens Erhvervsråd, 2022). Samlet er det 13%, der ikke opnår mindst 2 i både dansk og matematik. De geografiske forskelle ses på både private og offentlige skoler og flere geografiske områder f.eks. på Lolland og Falster er andelen uden 2-tallet i de to fag mindst dobbelt så stor som f.eks. i København eller Århus. Undersøgelsen har også fokus på sammenhæng til trivsel, og det viser sig, at de elever, der er glade for at gå i skole i 6. klasse, også får bedre karakterer til afgangsprøverne i 9. klasse. Det gælder målt på den faglige trivsel, men også på f.eks. social trivsel. Om der er forskel i arten af matematikvanskeligheder, er ikke undersøgt.

Undersøgelser viser, at der er korrelation mellem socioøkonomisk status og matematikpræstationer, og en af mekanismerne bag er matematikindholdet i de samtaler i hjemmemiljøet, som børn hører og deltager i (Daucourt et al., 2021). En anden mekanisme undersøges af Saxe et al. (1987), som viser, at forældre med lav socioøkonomisk status undervurderer børns potentialer for matematiklæring, og at forældre med middelklassebaggrund har større og mere fokuserede forventninger, som svarer bedre til børnenes zone for nærmeste udvikling.

At elever med lavere socioøkonomisk status er overrepræsenterede blandt lavest præsterende elever, bekræftes af danske resultater fra TIMSS og PISA. Det bekræftes også af rapport fra EU-kommissionen om præstationer og motivation i matematik og

naturfag (Horváth et al., 2022). Rapporten konkluderer, at indflydelsen af socioøkonomisk baggrund kan reduceres ved politiske og strukturelle tiltag.

Etniske forskelle er også et hyppigt fokus i nationale og internationale sammenligninger. I nogle studier er der fokus på, at etnicitet i forhold til matematik indgår i komplekse sammenhænge med socioøkonomisk status, sprog talt i hjemmet og køn. Etnicitet er en variabel i de danske undersøgelser i TIMSS, PISA, PISA-København og i analyser af afgangsprøver.

Alle undersøgelser viser forskelle i matematikpræstationer i forhold til etnicitet i Danmark. I den udstrækning matematikvanskeligheder har betydning for matematikpræstationer, så er der etniske forskelle i mængden af elever ramt af matematikvanskeligheder. Forskellene fremgår blandt andet af publikation fra Arbejderbevægelsens Erhvervsråd fra 2018 om data fra 2016. Samlet er det 16%, der ikke opnår mindst 2 i både dansk og matematik, som både indbefatter de, der ikke dletager i afgangsprøven og dem der får under 02. Men blandt indvandrere fra ikke-vestlige lande fik 56% ikke mindst 2 i både dansk og matematik. Nogle af dem, der ikke opnåede disse karakterer, gik slet ikke op til alle prøverne. Også her er der etniske forskelle: For drenge af etnisk-dansk oprindelse gik næsten 12% ikke til alle prøverne. Men blandt indvandrerdrengene af vestlig herkomst var det 23,5% og 48,3% af indvandrerdrengene fra ikke-vestlige lande. Af pigerne var der 8,8% af de danske piger, der ikke gik op til alle prøverne. Af indvandrerpigerne af vestlig herkomst var det 21,2% og 40,5% af indvandrerpigerne fra ikke-vestlige lande. Således ligner andelen for efterkommere i højere grad andelen for de unge med dansk herkomst, end andele for indvandrere gør. (Arbejderbevægelsens Erhvervsråd, 2018)

Som det fremgår af nedenstående tabel er der i 2019 ingen signifikant forskel i matematikscorer for de elever, der 'Altid' og 'Næsten altid' taler dansk i hjemmet, mens der i sammenligningerne mellem de elever, der 'Altid' taler dansk i hjemmet, og de elever, som 'Nogle gange' og 'Aldrig' taler dansk i hjemmet, findes signifikante forskelle på henholdsvis 31 og 44 point. De gennemsnitlige scorer for de elever, som 'Altid', 'Næsten altid' og 'Nogle gange' taler dansk i hjemmet, er i alle tilfælde signifikant lavere, end de var i 2015.

Andel elever, der taler dansk i hjemmet, TIMSS 2007-2019

	Altid	Næsten altid	Nogle gange	Aldrig
TIMSS 2019	65,1 (1,1)	21,8 (0,9)	12,0 (0,8)	1,2 (0,2)
TIMSS 2015	70,1 (1,1)	18,3 (0,8)	10,9 (0,7)	0,7 (0,1)

Fra rapporten TIMSS 2020

Differencen mellem grupperne er i ingen tilfælde i TIMSS 2007 og 2015 statistisk signifikant forskellig fra den tilsvarende difference i 2019. Dette tyder på, at det samlede fald i matematikscorer fra 2015 til 2019 i den samlede population ikke har en sproglig skævhed. De elever, som taler et andet sprog i hjemmet, er relativt set hverken gået ekstra frem eller tilbage.

Forældrenes forhold til og opfattelse af, hvor vigtigt det er at lære matematik, indvirker også på barnets indlæring. Barnet lærer ved at imitere de voksnes adfærd, og de lærer ligeledes fra de voksne, hvordan læring foregår. Zevenbergen (2000) pointerer, at når vi ser på matematikundervisningen i lys af den kulturelle og sociale situation, finder vi forhold, som kan ekskludere elever og dermed skabe matematikvanskeligheder. For at kunne knække koden, må eleven kunne mestre tre færdigheder:

- En rimelig god, generel sprogforståelse.
- Kunne deltage i klassens kommunikation
- Knytte de matematiske problemstillinger sammen med en kendt kontekst eller sammenhæng, der ofte er baseret på hverdagssituationer, som eleven har erfaringer med.

Neurologiske/kognitive perspektiver

I de sidste 30-40 år har der været en meget omfattende udvikling inden for hjerneforskningen. Det kan ses på antallet af forskningsartikler, som i samme periode er vokset betydeligt – specielt i måling af det man opfatter som udvikling af svag 'numeracy' og 'number sense'.

Forskning i kognitionsvidenskab har forsøgt at identificere de mest basale numeriske processer, som opfattes som hjørnestene i al videre matematisk læring, og som dermed, hvis de bliver svækket, kan føre til matematiske indlæringsvanskeligheder.

Specifikke kognitive vanskeligheder

Elever med specifikke kognitive vanskeligheder vil typisk betragtes som "normalbegavede" elever med læringsproblemer knyttet til særlige færdigheder i særlige fagområder. Det følgende vil således kunne henhøre til forklaringsmodeller for fænomenet 'talblindhed' eller 'dyskalkuli'.

En af de mest dominerende hypoteser på området er en svækket evne til at vurdere forskellen i antallet af elementer i to mængder, f.eks. at kunne se, at der flere knapper i en mængde på 12 end i en mængde på 7. Der er forskning, som viser, at børn på 6. måneder kan skelne mellem antallet af elementer i to mængder i forholdet 1:2 (Noël & Rousselle, 2011). Børn kan således allerede på det tidspunkt fornemme, at der er flere elementer i en mængde med 16 elementer sammenlignet med en mængde på 8. Det omtales som 'Approximation Number System' – ANS. Dette er en ikke-verbal

repræsentation, der understøtter en intuitiv og tilnærmet talfornemmelse hos mennesker såvel som hos mange andre dyrearter (f.eks. rotter eller chimpanser). Ifølge Wilson & Dehaene (2007) vil svækkelse af ANS forklare matematiske indlæringsvanskeligheder, da dette ville være grundlaget for yderligere numerisk indsigt. Svage evner inden for ANS i førskolen forudsiger præstationer på skolematematik i en alder af seks år (Mazzocco et al., 2011). Elever med dyskalkuli har lavere præstationer i ANS end almindeligt præsterende elever (Piazza et al., 2010).

Anden forskning argumenterer for, at det ikke så meget er ANS, der er grundlaget for videre læring i matematik, men snarere barnets evne til at forbinde talsymboler (f.eks. mundtligt udtalte talord som 'fem' og skrevne eller printede arabiske talsymboler som '5') til den numeriske størrelse, de repræsenterer (Noël & Rousselle, 2011). Mange undersøgelser har vist, at præstationer i matematikprøver korrelerer stærkere med evnen til at identificere hvilket af to talsymboler, som er størst, end identifikation af hvilken mængde af to mængder af ikke-symboliske elementer, som er størst (Stricker og De Smedt, 2017).

En anden type talstørrelsesbehandling, der er blevet påberåbt som en mulig årsag til dyskalkuli, er 'subitizing'. Subitizing refererer til hurtig og præcis identifikation af antallet af genstande i et lille sæt (normalt mellem en og fire genstande). Undersøgelser har påvist svækkelse i denne proces hos børn med matematiske indlæringsvanskeligheder (f.eks. Ashkenazi, Mark-Zigdon & Henik, 2013).

Endelig har forskningen overvejet et andet grundlæggende aspekt ved tal, nemlig tallenes ordinalitet. Dette refererer til rækkefølgen af tallene i tællerækken. Børn med matematiske indlæringsvanskeligheder er således langsommere end typiske børn på samme alder til at recitere talrækken (Landerl, Bevan & Butterworth, 2004). Inden for de seneste 10 år er mange forfattere enige i idéen om, at numerisk udvikling er bygget på flere neurokognitive komponenter, og at svækkelse i nogle af disse kan kompromittere denne læring (Fias, Menon & Szucs, 2013). Man kan således konstatere, at svækkelse i de basale talprocesser som ANS, subitizing, symbolisering af antal samt tal i rækkefølge kan føre til matematiske indlæringsvanskeligheder, der kan begrunde f.eks. talblindhed.

I det undervisningsministerielle talblindeprojekt 2014-18 indgik interviews med formodede talblinde unge og voksne (Lindenskov m.fl., 2018). Her indgår beskrivelser af visse fælles kendetegn, som er rubriceret i følgende otte punkter:

Er følelsesmæssigt påvirket af deres vanskeligheder

Der er en gennemgående og stærkt udtalt oplevelse af dumhed, som frustrerer. De unge og voksne udtaler ofte forvirring om, at det er mærkeligt, at de har vanskeligheder med matematikken, når de har nemt ved andre fag, der er mere sproglige og er uden tal.

Deres oplevelser af undervisning i matematik har medført lav selvværd og modstand over for faget.

Særlige vanskeligheder med at fastholde tal og genfremkalde tal

De omtaler tit store problemer med glemsel, når tal indgår. I ekstrem form er der nogle, som danner deres eget "symbolsprog" ved at oversætte cifre til f.eks. nye tegn eller farver. Der er således ofte tale om særlige kompenserende (og specielle) hukommelsesstrategier, som belaster arbejds hukommelsen.

Særlige vanskeligheder ved at ordne tal og aflæse skemaer med tal

De oplever at have svært ved eller er langsomme til at afgøre ordningen/rækkefølgen af to tal. Det er vanskeligt at placere tal rigtigt på tallinje – og skelne størrelsen på talsymboler. De kan have svært ved at overskue og aflæse skemaer og tabeller. Mange omtaler, at de meget ofte føler sig forvirrede, når de skal afkode tal og regneudtryk. Nogle fortæller også om vanskeligheder i forbindelser med anvendelse af andre symboler end matematiske symboler, f.eks. med at anvende noder.

Særlige vanskeligheder ved at regne med selv enkle tal

Generelt set har de svært ved enkel aritmetik. De regner ofte mekanisk og uden større indlevelse og indsigt. De laver mange fejl og usystematiske fejl. De bliver hurtigt trætte ved beregningsarbejde. Nogle har en oplevelse af, at det, de har lært af tabellerne, forsvinder og er væk. De arbejder langsomt med matematik som en kontrast til arbejdsopgaver i andre fag. De oplever, at det er meget vanskeligt at huske procedurer; selv hvis en procedure synes lært, glemmes den ofte let. Meget ofte bruges tællestrategier, og det er almindeligt at anvende sine fingre til tælling. De anvender tællemarkører ved beregninger på papir.

Særlige vanskeligheder med at relatere sig til størrelser som tid, længde og vægt

Mange har specielt vanskeligt ved at aflæse tid og overskue tidslængder. De har gennemgående svært ved at estimere størrelser som længde, vægt og volumen. De har svært ved at bruge hverdagsreferencer til overslag. De vægrer sig typisk ved at gætte størrelser og gætter ofte meget forkert. De har svært ved at aflæse og anvende måleudstyr, specielt skalaer. De omtaler vanskeligheder ved madlavning og bagning, når der skal måles.

Særlige vanskeligheder med at overskue pengebeløb og mønter/sedler

Mange taler om komplikationer ved handel med penge. Det drejer sig om overblik over, hvad den samlede pris på indkøbte varer er og om overblik over summen af de mønter og sedler, man har. Specielt sedler med "mange nuller" virker uoverskuelige. Mange har svært ved at sammenligne priser. Også at afrunde et beløb kan være svært.

Særlige vanskeligheder med at orientere sig

De unge og voksne har svært ved at orientere sig. De kan have svært ved højre og venstre eller har været længe om at lære det. De kan have svært ved at lære en koreografi fx i sanglege, gymnastik eller dans. De har svært ved at finde rundt. De kan blive forvirrede over at skulle finde tilbage fra et ikke helt kendt sted og kan også have svært ved at læse kort. Nogle omtaler spejling i geometri som vanskeligt.

Er generelt intellektuelt normalt præsterende

Det ligger i definitionen på talblindhed, at personer ramt af talblindhed antages at have rimelige alderssvarende intellektuelle evner. De er ofte almindeligt gode til sprog, og de er ofte gode læsere. Der kan dog være talblinde, som også har ordblindesyntomer, der påvirker deres sproglige formåen. Flere kan indgå i abstrakte matematiske sammenhænge, så længe der ikke indgår tal og symboler. Flere nævner, at de oplever et normalt præstationsniveau inden for geometri.

Generelle kognitive vanskeligheder

I udtrykket 'generelle indlæringsvanskeligheder' ligger implicit, at eleverne har en nedsat intellektuel funktion. Eleverne beskrives ofte som værende forsinket i deres udvikling. Der er således tale om funktionsnedsættelser af forskellig karakter og i forskelligt omfang, der generelt og dermed i mange fag påvirker elevernes læring.

Sprogforstyrrelser

En af disse generelle kognitive processer er sproget. Barnets første numeriske læring er tællesekvensen, hvor talord skal læres og produceres i den rigtige rækkefølge i tællerækkefølgen. Adskillige artikler har vist, at børn med en specifik sprogforstyrrelse udviser store vanskeligheder i denne læring (Donlan, Cowan, Newton & Lloyd, 2007). Efterfølgende viser de også vanskeligheder i anden numerisk indlæring, såsom optællingsprocesser eller regnestykker. Overordnet svarer matematikniveauet for børn med specifikke sprogforstyrrelser til deres sproglige niveau (Durkin, Mok & Conti-Ramsden, 2013).

Flere undersøgelser har vist signifikante sammenhænge mellem børns aritmetiske præstationer og deres fonologiske bevidsthed (bevidstheden om de lyde eller fonemer, der udgør ord) (Hecht, 2001). Disse fonologiske bevidsthedsevner (målt i en alder af fire eller fem) forudsiger børns efterfølgende matematiske færdigheder et eller to år senere (Simmons & Singleton, 2008). Krajewski & Schnieder (2009) påviser, at de fonologiske bevidsthedsevner målt i en alder af fem år korrelerer signifikant med matematiske præstationer i en alder af otte, når det kommer til grundlæggende talpræstationer (at tælle fremad og læse arabiske tal), men meget mindre når det kommer til opgaver, der kræver forståelse af mængden udtrykt ved tal.

Talrige undersøgelser har vist, at mennesker med ordblindhed ofte har dårlige præstationer i matematik, især i fremhentning af aritmetiske fakta i hukommelsen (Simmons & Singleton, 2008), dvs. svarene på små beregninger som $5 + 3$ eller 6×3 for eksempel. Flere forskere peger på, at årsagen kan være ordblindes vanskeligheder med at oprette et aritmetisk faktanetværk i langtidshukommelsen (Boets & De Smedt, 2010).

Hukommelse

Elever med matematiske indlæringsvanskeligheder har problemer med at huske de aritmetiske fakta. Vanskelighederne med at huske aritmetiske fakta bliver ikke forklaret med svage langtidshukommelseskapaciteter (De Visscher & Noël, 2014a), men med overdreven følsomhed over for lighedsinterferens i hukommelsen (De Visscher & Noël, 2014b). En vanskelighed med sekvenshukommelse har også vist sig at korrelere med dårlig aritmetisk faktabehandling hos bachelorstuderende (Holmes & McGregor, 2007). Flere undersøgelser beskæftigede sig med korttidshukommelseskapaciteter baseret på ideen om, at lagring i langtidshukommelsen såsom $4 + 2 = 6$, kræver, at disse tre tal først samaktiveres i korttidshukommelsen. Hvis korttidshukommelsen er svag, "når det ikke at blive husket". Undersøgelser viser også, at alle arbejdshukommelseskompontener (inklusive hæmning, skift og opdatering) er forbundet med matematisk ydeevne. (Friso-van den Bos et al., 2013 og Swanson & Jerman, 2006).

De visuel-spatiale processer

Et tredje generelt kognitivt domæne, der synes at være involveret i numerisk udvikling, er den visuel-spatiale domæne – en rumlig sans. Det er oplagt, at der i matematik er behov for visuel-spatiale kompetencer ved arbejde med geometri, men det gælder også for andre områder af matematikken, f.eks. at forstå positionssystemet eller for at løse flercifrede beregninger. Visuel-spatiale processer synes også at understøtte løsning af problemløsningsopgaver (Van Garderen, 2006). (Red: Det er lidt uklart, om det er snæver opfattelse af løsning af tekstopgaver ('wordproblems') eller en bredere problemløsningsadfærd.)

I vestlige kulturer vil de små tal være repræsenteret til venstre for en mental tallinje og de større tal til højre. En ofte anvendt opgave til at kortlægge elevens talforståelse rumligt er derfor tallinjeestimering, hvor eleven bliver bedt om at placere tal på en tom tallinje fra f.eks. 0 til 100. Præcision i denne opgave korrelerer signifikant med bredere matematiske kompetencer og understreger dermed igen vigtigheden af at forbinde rum og tal i numerisk udvikling. Nogle undersøgelser har fundet, at kapaciteter i matematik hænger sammen med rumlige færdigheder. Til støtte for dette observerede Mammarella og kolleger, at børn med nedsatte visuel-spatiale evner, men intakte verbale evner, havde dårligere præstationer end typiske jævnaldrende i geometri, i skriftlig beregning og i talrækkefølge (Mammarella et al., 2010).

Ræsonnement

Ræsonnementkompetencer er vigtige for at løse matematiske problemer, som rækker ud over færdigheder ved rutineopgaver. På tværs af en bred aldersgruppe (6 til 21 år) fandt Green (2017), at ræsonnementskompetencer var en væsentlig forudsigelse for matematiske resultater 1,5 og 3 år senere. Desuden fandt Morsanyi (2013), at elever med matematiske indlæringsvanskeligheder har lavere ræsonnementskompetencer (i dette tilfælde transitiv ræsonnement) end alderstypiske elever.

Opmærksomhed ('attention')

En central læringsdiskussion omhandler elevens evner vedr. opmærksomhed og koncentration. Begge evner er påvirket af psykologiske processer som lyst, motivation, vægring osv. Se videre under psykologiske perspektiver.

Didaktiske perspektiver

Didaktiske perspektiver på matematikvanskeligheder omhandler, hvordan undervisning øver indflydelse på elevers matematikvanskeligheder. Det undersøges her, hvordan undervisning har indflydelse på, at matematikvanskeligheder opstår, manifesterer sig, vedligeholdes og forstærkes. Nogle af de forskere, der lægger vægt på didaktiske perspektiver, anskueliggør, at eksklusion og inklusion kan foregå både i segrerede og inkluderende institutionelle sammenhænge (Gervasoni & Lindenskov, 2011) og udstikker nye forskningsspørgsmål: *"Perhaps indeed the question is not how we can assist students with mathematical learning difficulties, but how we can learn to build a mathematics education system that no longer disables so many mathematics students"* (Scherer et al., 2016, p. 646).

De følgende elementer i og omkring undervisningen har negativ indflydelse på elevernes muligheder for læring og motivation.

Indhold og aktiviteter i undervisningen

Foregående og aktuel undervisning af lav kvalitet kan skabe, fastholde og forstærke elevers matematikvanskeligheder (Reusser, 2000; Undervisningsministeriet, UVM, 2003).

Undervisning med uklar relation til anvendelser kan skabe, fastholde og forstærke elevers matematikvanskeligheder. Anvendelseseksempler, der er pseudo-realistiske og løsbare, skaber, vedligeholder og forstærker matematikvanskeligheder for nogle elever. Undervisning kun med 'pseudo-realistiske' eksempler forhindrer, at eleverne får adgang til virkelighedens problemer, hvoraf nogle kan behandles matematisk og andre ikke (Freudenthal, 1991; Patton et al., 1997).

Undervisning, der opererer med matematiske symboler uden at forbinde symboler med fortællinger, fysiske objekter og illustrationer, kan skabe, fastholde og forstærke elevers matematikvanskeligheder (Patton et al., 1997; Hwang & Riccomini, 2016).

Undervisning, der kun lægger vægt på at lære procedurer, og som ikke støtter begrebsmæssig forståelse og ikke eksplicit modarbejder begrebsmæssige misforståelser, kan skabe, fastholde og forstærke elevers matematikvanskeligheder (Houten, 1993; Gray & Tall, 1994; Røsseland, 2011; Niss & Jankvist, 2017; Fuchs et al., 2009; Powell & Fuchs, 2010).

Undervisning, der ikke støtter elevers udvikling af strategier i beregninger og problemløsning, kan skabe, fastholde og forstærke elevers matematikvanskeligheder (Ostad, 2007; Nelson & Powell, 2018).

Fagopfattelse

Fagopfattelser i og uden for klasserummet, hos lærere og elever og andre, kan påvirke elevers motivationelle dispositioner, faglige selvtillid og holdninger til at lære matematik og derigennem øve indflydelse på matematikvanskeligheder (Ruesser, 2000).

En fagopfattelse om, at matematik handler om opgavespørgsmål, som kan besvares korrekt og hurtigt med én mest effektiv metode, er med til at skabe, vedligeholde og forværre matematikvanskeligheder (Schoenfeld, 2022, p.11).

En fagopfattelse om, at matematik er et abstrakt fag med overvejende symbolsprog, kan skabe, fastholde og forstærke matematikvanskeligheder for elever med læsevanskeligheder (Powell, Fuchs, Fuchs, Cirino & Fletcher, 2009).

En hierarkisk fagopfattelse om, at elever først skal have færdigheder i aritmetik med etcifrede, tocifrede, trecifrede tal og eventuelt videre, inden de må lære om fx procenter og funktioner, fastholder elever i matematikvanskeligheder i en position, hvor de kun får mulighed for at lære aritmetik (Lindenskov & Weng, 2021).

Læringsopfattelse

Når kulturen i klassen – hos læreren og/eller hos elever – tilsiger, at man lærer ved at besvare opgaver skriftligt og individuelt, kan det skabe, fastholde og forstærke matematikvanskeligheder (Schoenfeld, 2022). Nej

Når lærere mener, at medfødte evner er bestemmende for elevers læring sammenlignet med indsatsens betydning, så kan det give lavere indre motivation hos lavt præsterende elever (Dweck, 1986; Heyder et al., 2020).

Når kulturen i klassen – hos læreren og/eller hos elever – tilsiger, at hurtighed er en indikator for at læringen er lykkedes, så kan det skabe, vedligeholde og forstærke matematikvanskeligheder (Montague & Applegate, 2000).

En læringsopfattelse af, at ordblindhed ikke influerer på matematiklæring, kan være med til at skabe, vedligeholde og forstærke matematikvanskeligheder hos ordblinde elever (Cawley et al., 1979).

Lærerens orkestrering af klasserum og elever.

Når lærerens introduktion ikke opfanges af elever – som følge af introduktionens hastighed eller indhold, så kan det skabe, vedligeholde og forstærke matematikvanskeligheder (Lindenskov & Lindhardt, 2020).

Når lærerens feedback ikke opfanges af elever, så kan det skabe, vedligeholde og forstærke matematikvanskeligheder (Sortkær, 2017).

Når elever oplever, at de ikke bliver hørt, og at deres input ikke dur, så kan det påvirke motivation og faglige selvbillede og derigennem skabe, vedligeholde og forstærke matematikvanskeligheder (Reusser, 2000; Schoenfeld, 2022; Faragher et al., 2019).

6. Forældreperspektivet

Det er ganske få forskningsartikler i vores søgning, som direkte omhandler forældreperspektivet knyttet til at have et barn, som er i matematikvanskeligheder. Der synes således at være belæg for at efterlyse forskning, hvor man f.eks. undersøger potentialer i hensigtsmæssige samarbejdsrelationer, hvor forældre kan indgå som part i barnets motivation og læring i matematik.

Maloney et al. (2015) påviser sammenhæng mellem forældres ængstelse i forhold til matematik og deres børns matematikpræstationer og matematikængstelse.

Baker et al. (2002) viser, at specifik feedback til forældre om deres lavt præsterende barn har et potentiale til at øge præstationsniveauet – dog med moderat effekt. Der peges på, at en sådan feedback skal være specifik, objektiv og ærlig samt omhandle detaljerede succeser frem for fejl og vanskeligheder.

I en undersøgelse af Eccles & Jacobs (1986) fandt forskerne ud af, at når mødre fortalte deres døtre, at de selv ikke var gode til matematik i skolen, faldt deres døtres præstation næsten øjeblikkeligt.

I en undersøgelse af neuroforskeren Erin Maloney og kolleger fandt man ud af, at forældres matematikængstelse reducerede deres børns læring af matematik i 1. og 2. klasse, men kun hvis forældre hjalp deres børn med matematiklektier (Malone et al., 2015). Hvis forældrene ikke hjalp dem med lektierne, forringede forældrenes matematikængstelse ikke deres børns indlæring.

7. Hvad kan man gøre?

Der er i litteraturen mange typer anbefalinger om, hvad der kan gøres ved matematikvanskeligheder. Anbefalinger kan angå forskellige samfundsniveauer og med forskellige aktører, men størstedelen af forskningslitteraturen omhandler individniveau og institutionsniveau. Her er der således tale om konkrete tiltag i tilknytning til uddannelsesinstitutioner, typisk på grundskoleniveau. Tiltagene kan foregå inde i skolen eller i støttefunktioner uden for skolen. På aktørsiden omtales først og fremmest undervisere, dernæst professionelle med baggrund i psykologi, kognition og medicin. Aktiviteter kan angå et enkelt barn, alene i gruppe eller i klasse. Aktiviteter kan angå grupper af børn.

Der er i litteraturen kun enkelte aktiviteter, der foregår uden for skolen, ligesom der kun er meget lidt i litteraturen om aktiviteter, der omhandler eller inddrager familie. Vi erfarer, at der er et stigende udbud af støtte, herunder i form af lektiehjælp, så vi formoder, at familier i Danmark i stigende grad køber hjælp fra private udbydere, men litteraturen vi har set på, indeholder ikke undersøgelser om dette.

I litteraturen er der repræsenteret forskellige formål på elevniveau, mest udbredt handler det om forbedringer af aktuelle præstationer og fremtidigt beredskab inden for en række matematiske discipliner og facetter. I mindre udstrækning er der i litteraturen undersøgelser, hvor formålet er forandringer i motivationsformer, i arbejdsmåder, i holdninger til matematik og i selvopfattelser.

Der er meget litteratur om skolealderen og begrænset litteratur om småbørn, unge og voksne.

På samfundsniveau er internationale sammenlignende undersøgelser og efterfølgende analyser tænkt som inspiration til, hvordan uddannelsespolitik og undervisningskulturer kan søges udviklet med henblik på svagt præsterende elever i matematik. Her kan nævnes Jo Boalers efterfølgende analyse af PISA 2012-data om matematikpræstationer og kulturers, læreres og elevers 'mindset' om læringsmuligheder.

Majoriteten af den udvalgte litteratur omhandler interventioner i den eksisterende skole. Interessen kredser om elevkarakteristika, interventionernes didaktiske tilgange, matematisk indhold i form af matematisk stof og matematiske kompetencer samt effekter af forskellig slags, typisk præstationer i test kort tid efter og længere tid efter, at interventionerne er afsluttet.

En række undervisningstilgange

Der anvendes i litteraturen forskellige karakteristikker af organisering og indhold i undersøgte interventioner. Der er ikke fuld konsensus om disse karakteristikker. Dette

beklages fra flere sider, idet det gør det kompliceret at sammenfatte resultater fra forskellige interventionsstudier. Vi har valgt i det følgende at referere de karakteristika, som forskerne selv anvender i deres publikationer, og vi har valgt at benævne dem som undervisningstilgange. Først nævner vi en række tilgange, som ofte behandles i litteraturen, derefter uddyber vi resultater angående disse, og vi afslutter med at beskrive yderligere tilgange, som er påvist mere eller mindre effektive for elever i matematikvanskeligheder

Som tidligere nævnt, fremkommer der i Gersten et al. (2009) syv undervisningstilgange som de mest anvendte i 14 interventionsstudier som hjælp til elever i matematikvanskeligheder:

1. eksplicit undervisning,
2. visuel repræsentation,
3. elever sprogliggør matematikken,
4. brug af mange eksempler,
5. løbende feedback,
6. brug af heuristik eller mange problemløsningsstrategier,
7. kammeratskabshjælp.

Gersten et al. viser, at tilgang 1-5 har stor effekt, hvor det anføres, at feedback til elever ikke (kun) skal omhandle præstation, men også indsats. Heuristik, som henviser til generel viden og færdigheder ved løsning af matematiske problemstillinger/opgaver, har også effekt, men i lidt mindre grad. Kammeratskabshjælp i disse studier viste sig at have noget mindre effekt for elever i matematikvanskeligheder end for elever generelt (s. 1232). Se senere om flere studier af kammeratskabshjælp.

Tilsvarende fremkommer der fra Powell et al. (2021) seks undervisningstilgange som de mest effektive ifølge 72 interventioner for elever i 6., 7. og 8. klasse med matematikvanskeligheder, herunder med en identificeret LD (learning disability). I 59 af de 72 interventioner påvistes effekt. Ligesom hos Gersten et al. udpeges de mest effektive tilgange til at være

- eksplicit undervisning,
- elever sprogliggør matematikken.

Desuden viste gennemgangen effekt på

- mange repræsentationer,
- problembehandling,
- hukommelsesteknikker.
- grafiske organiseringsværktøjer.

Det bemærkes, at der er stor variation i de 72 interventioner. De varierede i længde mellem 4-150 sessioner og mellem 0,3-94 timer.

Tekstopgaver som fokus

Tekstopgaver er en sproglig beskrivelse af en sammenhæng, som ikke kun består af tal, tegninger eller grafer. Sammenhængene er ofte opdagede, og de er mere eller mindre eventyragtige eller hverdagsagtige. Ud fra tekstopgave kan man uddrage et regnestykke eller et geometrisk spørgsmål, som kan besvares. Tekstopgaver bliver nogle gange omtalt som regnehistorier.

Shin et al. (2021) sammenfatter 20 artikler om undervisning med fokus på tekstopgaver for 1.-12. klasses elever i matematikvanskeligheder i perioden 1975-2020. Der blev fundet stor effekt for elever med matematikvanskeligheder.

Problembehandling som fokus

I erkendelse af, at problembehandling og matematisk modellering er en vigtig kompetence for alle – også for elever med eller i risiko for matematikvanskeligheder – undersøgte Hwang & Riccomini (2016) 17 interventioner med dette fokus. De fandt, at der var anvendt følgende overordnede tilgange med kontakt til anvendelse uden for matematikken.

- Den heuristiske tilgang lægger vægt på faser i problembehandling og stiller mindre kognitive krav, hvilket er en umiddelbar støtte for disse elever, men det øger ikke deres forståelse af de matematiske begreber.
- Den semantiske og autentiske tilgang kan øge elevernes forståelse, ræsonnement og anvendelse. Den autentiske tilgang anvender problemer i virkelige (hverdags)sammenhænge frem for standard-tekstopgaver og frem for at anvende foreskrevne procedurer. I den sammenhæng påpeger Baker et al. (2009), at behandling af autentiske problemer er vanskelige, og elever i vanskeligheder har brug for dybgående forståelse af matematiske begreber for at kunne tackle autentiske situationer.

Patton et al. (1997) og Hwang & Riccomini (2016) lægger vægt på, at elever i matematikvanskeligheder skal have mulighed for at engagere sig i virkelighedsproblemer, som ikke på forhånd er matematisk strukturerede. Hwang & Hwang og Riccomini konkluderer således, at der *"ellers vil komme en voksende kløft mellem hvad eleverne kan i matematik og det de skal bruge i det virkelige liv. Det kan potentielt have langvarige negative konsekvenser for elever med LD, fordi så mange daglige aktiviteter nu kræver brug af matematik. Med memorisering og læring på overfladeniveau kan man måske finde facit på talopgaver, men det gør meget lidt til fremme af brugen af matematik i virkelige problemsituationer"* (p. 179, vor oversættelse).

Det er vores erfaring, at der blandt nogle lærere og forskere er betænkeligheder ved at tilbyde problembehandlende matematikundervisning med argumentet om, at denne

tilgang er en forhindring for, at elever lærer grundlæggende matematikfakta og færdigheder. Ligeledes er det vores erfaring, at der blandt nogle lærere og blandt nogle forskere især er betænkeligheder ved at tilbyde denne tilgang til svagt præsterende og elever i matematikvanskeligheder.

Fletscher & Grigorenko (2017) viser, at disse betænkeligheder ikke er holdbare. Fletscher & Grigorenko sammenfatter en lang række undersøgelser, der belyser, hvordan elever i matematikvanskeligheder lærer matematikfakta henholdsvis i en problembehandlende undervisning og i færdighedstræning. Undersøgelserne viser, at elever i matematikvanskeligheder lærer lige så meget om talfakta med en systematisk problembehandlingstilgang med opmærksomhed på talsammenhænge som i træning af isolerede færdigheder. Isoleret færdighedstræning gav transfer til talberegninger, men ikke til problembehandling eller begyndende algebra. Problembehandlingstilgangen gav transfer både til talberegning, problembehandlingsopgaver og begyndende algebra. For både problembehandlende tilgang og færdighedstræning er det nødvendigt, at undervisningen er eksplicit og intens, tilpasset den enkelte elev. Det er også nødvendigt, at der er fagligt fokus ifølge undersøgelserne, hvorimod træning alene af arbejdshukommelse og lyd- og billedprocessering ikke giver effekt på matematiklæring. Men for elever med opmærksomhedsproblemer og organiseringsproblemer kan det fra undersøgelserne anbefales, at der indgår elementer til fremme af selvorganisering.

I Danmark er der udviklet en såkaldt dansk model for interventioner i forhold til matematikvanskeligheder, forstået som 'regnehuller', med brug af problembehandlende tilgang (Lindenskov & Tonnesen, 2020). Her er påvist effekt på fagligt udbytte.

Selvregulering

Det, der betegnes som almindelig selvreguleret adfærd i en undervisningssituation, omfatter målsætning, selvevaluering, selvinstruktion, viljestyrke, forestillingsevne og egenstyring af undervisningsmiljøet (Harris et al., 2006). Udvikling og anvendelse af selvregulering kræver et tilstrækkeligt niveau af motivation. Pintrich (1999) betoner, at selvregulering kræver tid og indsats, og derfor er motivation nødvendig for kunne udvikle og anvende selvreguleret adfærd. Pintrich fremhæver som effektive motivationselementer at tro på egne evner (self-efficacy), at finde emnet interessant, vigtigt og brugbart, at stræbe efter at beherske stoffet og at konkurrere med andre. Men 'ydre' motivation som at få ros eller gode karakterer fremmer ikke selvreguleret læring.

Butler (2021) beskriver, at interventioner med selvregulerede elementer resulterer i positive effekter på motivationsmålinger såsom self-efficacy, selvværd, tilskrivninger, værdi for opgaven, forventning om succes og indre motivation. Det selv at målsætte og anvende sproglige tilgange for færdiggørelse af opgaven synes at forbedre sandsynligheden for, at elever, der kæmper, vil vise positive gevinster i motivation.

Motivation og viljestyrke

En barriere for matematiksucces kan være egen eller lærerens tro på, at enten har man et naturligt talent for matematik, eller også mangler man det. Dette omtaler Jo Boaler (2016) på baggrund af den amerikanske psykologiprofessor Carol Dwecks pædagogiske teori som et "fixed mindset" og påviser, at elever i matematikvanskeligheder er særligt tilbøjelige til denne mentalitet.

Boaler argumenterer for, at en lærer kan påvirke, hvilket mindset en elev har. Dette udsagn er baseret på en undersøgelse, hun udførte, hvor hun besøgte 400 femte klasse-elever og præsenterede dem for en opgave, hvor næsten alle præsterede godt. Halvdelen af eleverne fik ros for deres resultater, og den anden halvdel fik ros for at have arbejdet godt. Herefter blev eleverne præsenteret for og kunne vælge mellem to nye opgaver. En meget simpel opgave, hvor eleverne havde erfaringer for, at de ville klare det godt, og en mere krævende opgave, hvor eleverne højst sandsynligt ville lave fejl. 90% af de, som blev rost for deres anstrengelser, valgte den svære opgave, hvorimod majoriteten af de som blev rost for at være dygtige, valgte den simple opgave.

Understøttende undervisning

Baten et al. (2020) undersøger, hvad der er en optimal sværhedsgrad for elever. De anfører, at elever, der arbejder med opgaver, som eleverne finder svære, viser mindre interesse, mere irritation og søger færre udfordringer. Disse negative reaktioner er det ifølge Baten et al. særlig vigtigt at kunne neddæmpe hos lavtpræsterende elever og elever i matematikvanskeligheder. Disse elever har stort behov for at blive stimuleret til at acceptere nye udfordringer – i skolen og senere i livet, og til ikke lade sig bremse af negative reaktioner på 'passende, men lidt svære' opgaver. Ifølge Baten et al. kan de negative reaktioner neddæmpes ved såkaldt 'autonomy-supportive' undervisning, hvor læreren anvender et inviterende sprog, og hvor læreren tilstræber, at eleven kan opleve en eller anden form for meningsfuldhed ved matematikundervisningens aktiviteter.

Undervisning med husketeknikker

Maccini et al. (2007) sammenfattede 23 artikler fra 1995 til 2006 om interventioner i 'secondary schools' med elever i matematikvanskeligheder. Her viste der sig stort udbytte ved at inddrage husketeknikker, tilpasset undervisning til elevers niveau, heuristik ('cognitive strategy instruction involving planning'), begrebsfokus ('schema-based instruction') samt videooptagelser ('contextualized videodisc instruction').

Sprogligt orienterede undervisningstilgange

McKenna et al. refererer Baxter et al. (2005) og DeSimone & Parmar (2006) for, at elever kun sjældent forklarer eller diskuterer mundtligt.

Baxter et al. viser dog et studie, hvor en lille gruppe elever i matematikvanskeligheder i 7. klasse skriftligt udtrykker matematisk argumentation og bevis. Her blev det observeret, at elever, der ikke deltog i mundtlige samtaler, kunne udtrykke sig skriftligt om deres tænkning om rationale tal, hvor de anvendte tegninger, symboler og ord. Det blev også observeret, at de skriftlige noter åbnede nye muligheder for efterfølgende samtaler mellem lærere og elever.

Baker et al. (2018) omhandler fire studier af matematikinterventioner i USA med elever, der ikke har undervisningssproget som modersmål. Denne gruppe præsterer relativt lavt ved præstationstest. I interventionerne var der fokus på læsning og på forståelse af ord og mening tekstopgaver i matematik. Her blev anvendt 'Dynamic Strategic Math', hvor læreren systematisk modificerer ordforråd og tilpasser det eleverne. Der var også fokus på at vise eksempler på problembehandling, på stilladsering og på, at eleverne fik feedback. Effekten blev målt med tekstopgaver i matematik, og der var stor fremgang at spore.

Kammerathjælp

Wexler et al. (2015) ser på 13 interventioner mellem 2001 og 2012 med kammerathjælp for 11-18-årige 6.-12. klasse elever i læringsvanskeligheder i gængse eller alternative skolesammenhænge med faglige vanskeligheder ('difficulties and disabilities'). Især når der er kammeratskabstilgang inkluderet i interventionsstudierne, er der god effekt. Wexler et al. fremhæver, at deres undersøgelse er i overensstemmelse med Kunsch et al. (2007), der undersøgte 17 interventioner med kammerathjælp for elever i matematikvanskeligheder. Det tyder på, at denne tilgang har en stor validitet (nærer stor tillid) hos unge og hos lærere, og det giver god mulighed for feedback fra en jævnaldrende på relevante tidspunkter, hvilket øger muligheder for at svare på feedback og prøve nogle lidt nye veje. Wexler et al. diskuterer, hvad det kan indebære fremover for interventioner med unge med hensyn til sammensætning og varighed af feedback-grupper.

Baker et al. (2002) fandt fra 15 interventionsstudier effekt af kammeratskabshjælp.

Interventioner med fokus på generelle kognitive funktioner.

Raghubar et al. (2010) fastslår svag effekt for interventioner, der er rettet mod træning af kognitive processer, men som ikke samtidig er rettet mod et fagligt indhold, f.eks. matematik: Denne form for intervention har vist sig ikke at give effekt på fagligt udbytte, her matematikfagligt udbytte.

Ifølge Raghubar et al. har vi stadig tilbage at få belyst, hvorvidt og hvordan kognitiv træning af domæne-generelle evner som arbejdshukommelse *i kombination* med kvalitetsrig matematikundervisning virker for elever i matematikvanskeligheder, specifikt for yngre børn og specifikt for ældre børn. Raghubar et al. foreslår på denne

baggrund, at der fremover detaljeret undersøges sammenhænge mellem specifikke dele af sanseapparat og arbejdshukommelse på den ene side og på den anden side specifikke dele af matematiklæring.

Inkluderende undervisning

I inklusionsstudier relateres ofte til lovgivning eller deklARATIONER. I amerikanske studier henvises ofte til Disabilities Education Improvement Act of 2004 (IDEA 2004), mens der i europæisk sammenhæng henvises til FN's Salamancaerklæring (UNESCO, 1994). Studier om inklusion viser forskellige resultater.

Zhang & Xin (2012) undersøgte 39 studier foretaget 1996-2009 for elever i matematikvanskeligheder. De ser studierne i lyset af aktuelle uddannelsespolitiske strømninger i USA, såsom inklusionspolitik og matematikundervisningsreformer. Zhang & Xin fandt frem til, at interventioner i inkluderende 'almindelige' klasser var mere effektive end interventioner i segregeret undervisning. Zang & Xin viser også, at inklusion af elever med læringsvanskeligheder ikke influerer på de normal-præsterende elever i inkluderende undervisning. Zang & Xin nævner, at deres resultat ikke er i overensstemmelse med Carlberg & Kavale (1980), som rapporterede, at inklusionsundervisning er bedre end segregeret for elever, der er mentalt udfordrede, mens segregeret undervisning er bedre end inklusionsundervisning for elever med specifikke læringsudfordringer som matematikvanskeligheder.

Af andre resultater vil vi nævne Dessemontet et al. (2012), der sammenligner 34 elever med matematikvanskeligheder, der er inkluderet i almindelig undervisning med 34 andre i specialskoler. Det viste sig her, at elever på specialskoler gjorde større fremskridt end elever i almindelig undervisning. Men i matematik var der ingen forskel på fremskridt i de to skoleformer.

Rollins (2008) viser, at elever med matematikvanskeligheder lærer mere matematik i inkluderende end segregeret undervisningsmiljø, men at inkluderede elever i matematikvanskeligheder har mindre selvtillid end segregerede elever i matematikvanskeligheder.

Boaler & LaMar (2019) indeholder en del eksempler fra inkluderende klasserum. Der er eksempler på, at elever identificeret med matematikvanskeligheder og lavt præsterende elever lykkes med at løse komplekse matematikopgaver og at præsentere deres arbejde for hele klassen.

I dansk sammenhæng har et projekt beskrevet i Lindenskov & Lindhardt (2020) med 4. klasses elever hos tyve lærere i tre kommuner analyseret lærerudtalelser på en række lærerseminarer og lærerudtalelser i lærerinterviews. Disse analyser mandede ud i følgende anbefalinger:

- Lærernes indledende præsentation for klassen er kort og tydelig.
- Lærerne giver sig tid til at uddybe for elever og løbende opsummere.
- Der findes en balance mellem for kompleks matematik og elevernes mulighed for at kunne engagere sig i matematikken. Dette holdt op mod risikoen for, at gentagne og kedelige opgaver kan forårsage elevernes passivitet og lav motivation.
- Brug af aktiviteter, som har lav adgangstærskel. Et spil kan være et eksempel på en sådan aktivitet, så længe alle elever har en chance for at vinde.
- Lærere anerkender og giver feedback til elever om deres læringsfremskridt.
- De enkelte elever inddrages i feedbackprocesser. Eleverne rapporterer om deres egen indsats såvel som om deres succes med at nå læringsmålene. Nu og da kan korte simple færdigheder og fakta før og efter testen bruges til at overbevise eleverne om, at de har forbedret sig.
- Lærere bliver ved med at udforske, hvilke undervisningspraksis deres individuelle elever finder demotiverende og motiverende.

Indsatser

Nelson & Powell (2018) undersøgte 35 studier, der havde rapporteret langsigtet (mindst 12 måneder) fremgang i matematikpræstation hos elever i matematikvanskeligheder. En fremgang der dog ikke ændrer, at eleverne halter efter andre, og at de vedvarer med at kunne betegnes med matematikvanskeligheder. Nelson & Powell viste, at elever med svære matematikvanskeligheder kan have gavn af smågruppe interventioner, der er intensive, strategiorienterede og eksplicite. (På dansk ville vi nok kalde det intensivt, strategiorienteret og fokuseret). Desuden er der elementer i interventionerne, der understøtter aktiv, auditiv og visual hukommelse ved at øve og gentage.

Det nævnes i øvrigt i en del forskning, at der kan være ekstra udbytter fra en række matematik-interventioner. Tilgange som 'støtte til opmærksomhed', 'træning af planlægning og organisering', 'udvikling af visual-spatial perception' og 'støtte til sprogudvikling' viser sig effektive i forhold til matematik i en række interventionsstudier, men disse tilgange kan potentielt også give fordele i andre områder end i matematik.

Kulturel opmærksomhed

Blandt praktikere og forskere verden er der anbefalinger om større samfundsmæssig og kulturel opmærksomhed på matematikvanskeligheder. Et forslag fra Gervasoni & Lindenskov (2011) blandt disse indeholder følgende:

- Tilgange, der på samfundsniveau opbygger kapacitet til at give adgang og kvalitet, så alle arbejder sammen til gavn for eleverne.
- Læreruddannelse af høj kvalitet, der indeholder fokus på at undervise studerende med særlige rettigheder.

- Evalueringsinstrumenter og -tilgange, der gør det muligt for lærere at identificere elevernes aktuelle matematiske viden i forhold til læringsforløb, og tilpasse instruktion i overensstemmelse hermed.
- Kvalitetslæreplaner, der indeholder fokus på både matematikkompetencer og muligheder til matematik på højt niveau.
- Kvalitetsinterventionsprogrammer, der opbygger tillid og viden.
- Instruktionspraksis og læringsmaterialer af høj kvalitet.
- Kommunikationsværktøjer og -tilgange, der giver eleverne fuld adgang til kvalitet matematikundervisning.

Selv for elever i matematikvanskeligheder med udfordrende ydre kår er der eksempler på interventioner med positive effekter, blandt andet for elever med lav socio-økonomisk baggrund i australske landområder (Murphy, 2022).

8. Hjælpemidler

Vi har sat særligt fokus på potentialerne i brug af analoge og digitale hjælpemidler, idet vi oplever en interesse for at udvikle/finde sådanne materialer til elever i matematikvanskeligheder samt stor interesse hos undervisere og forældre i dette felt. Omfanget af artikler, som omhandler disse temaer, er dog begrænset – hvad flere reviewer bemærker – idet der ofte ikke er et specialpædagogisk fokus på anvendelsen, men et mere alment didaktisk.

Benavides-Varela et al. (2020) påpeger, at der er forskel mellem de opnåede resultater ved brug af digitalbaserede læremidler hos almindeligt præsterende elever og så resultaterne for elever med vanskeligheder i matematik. Signifikante effekter rapporteret blandt almindeligt præsterende elever, f.eks af Li & Ma (2010), kan ikke nødvendigvis overføres direkte som anvendelige over for elever i matematikvanskeligheder.

Nogle undersøgelser har dog rapporteret virkningerne på elever med såvel generelle indlæringsvanskeligheder (Jitendra et al., 2018; Kroesbergen & Van Luit, 2003; Li & Ma, 2010;) som matematikvanskeligheder (Chodura et al., 2015; Kroesbergen & Van Luit, 2003). Deres resultater giver blandede konklusioner vedrørende effektiviteten af digitale værktøjer i matematikundervisningen. I nogle af undersøgelserne konkluderer forfatterne, at digitalt baserede værktøjer var mindre effektive end en lærer til at hjælpe elever med særlige behov (Kroesbergen & Van Luit, 2003), eller at de ikke gav effektive ændringer til læringsprocessen (Seo & Bryant, 2009). På den anden side fandt Li & Ma (2010) statistisk signifikante positive effekter af computerteknologi på matematikpræstationer og større effekter på interventioner for elever med særlige behov sammenlignet med effekterne på almindeligt undervist elever.

Studiet af Chodura (2015) meta-analyserede 35 undersøgelser med det formål at evaluere effektiviteten af forskellige typer interventioner, der er specielt designet til elever i matematikvanskeligheder. Undersøgelsen fandt en samlet positiv effekt af specialiserede interventioner, men rapporterede ingen signifikante forskelle mellem digital-baserede og face-to-face interventioner.

Rescue Calcularis er et fem ugers forløb med det formål at forbedre talrepræsentationer og styrke sammenhængen mellem tal og tallinjer. Resultaterne af interventionen indikerer, at både børn med og uden talblindhed forbedrer deres talrepræsentationer og aritmetiske færdigheder efter forløbet. Evaluering af interventionen viser, at børnene har gavn af træningen i forhold til både talrepræsentation, addition og subtraktion. En anden computerbaseret intervention er Number Race, som er baseret på afhjælpning af talblindhed. Evalueringen indikerer en signifikant forbedring i det, der tidligere

omtalt som deres talsans, men effekten blev ikke generaliseret til evnen til at tælle eller aritmetiske færdigheder.

Finske forskere (Hellstrand, 2020) har nærundersøgt effekten af brug af computerprogrammet Number Race (NR), som en intervention for matematisk lavtpræsterende elever i første klasse. Ud over almindelig lærerundervisning i matematik modtog interventionsgruppen ($n = 29$) NR-træning i 15-minutters sessioner, 3-4 dage om ugen, i løbet af en fire ugers periode. En sammenligningsgruppe bestående af matematisk lavt præsterende børn ($n = 27$) og en anden bestående af gennemsnitspræsterende børn ($n = 278$) modtog kun almindelig lærerundervisning i matematik i denne periode. Børnenes matematiske færdigheder (fx at tælle og grundlæggende regnefærdigheder) blev målt tre gange i løbet af første klasse ved hjælp af tre parallelle test. Grupperingen var baseret på den første vurdering med den laveste 20. percentil som cutoff. NR-interventionen fandt sted mellem anden og tredje vurdering. Der viste sig ikke at være nogen statistisk signifikant interventionseffekt i denne undersøgelse.

I den sammenhæng skal nævnes, at det første forskningsforsøg med børnehavebørn med Number Race (Wilson et al., 2009) viste, at Number Race-spilsoftware forbedrede børnehavebørns præstationer på sammenligningsopgaver med talsymboler.

Resultaterne fra Woods (2022) viser signifikante positive forbedringer ved brug af forskellige softwarespil for elever i klasse 1-5 i forskellige lande ved hjælp. Der vides dog lidt generelt om effektiviteten af computerbaseret undervisning for talblinde.

Bouck & Park (2018) bemærker også mulighederne for computerbaseret undervisning. Der rapporteres således om potentielt lovende effekt på læring og engagement hos elever i matematikvanskeligheder ved brug af mobile "devices" som tablets og smartphones. Det pointeres dog, at alene brug af "devices" ikke indeholder garanti for, at elevernes resultat forbedres. Det er blevet mere og mere klart – skriver de – at teknologi i sig selv ikke direkte ændrer undervisning og læring. Det kritiske element er snarere, hvordan teknologi indarbejdes i undervisningen

At give tilstrækkeligt antal øvelser og øjeblikkelig feedback samt individuel tilpasning af opgavevanskeligheder optræder blandt de egenskaber, der omtales til at give succesfulde matematiske læringsresultater i computerbaseret læring for elever i matematikvanskeligheder (Cezarotto & Battaiola, 2016). Anbefalinger til udformning af programmer omfatter bl.a. at reducere mængden af instruktioner samt brug af visuelt attraktive animationer og grafik for at øge læringsmotivationen. Det anbefales også at undgå at bruge for meget – potentielt distraherende – grafik, der ikke er relateret til det faglige formål, og at bruge enkle brugerflader, der fungerer som baggrund for spilaktiviteterne (Cezarotti & Battaiola, 2016).

Meget innovative interventionsprogrammer såvel som adaptive computervideospil baseret på neurovidenskabelig forskning er for nylig blevet udviklet til afhjælpning af dyskalkuli (Räsänen et al., 2009). Disse specialiserede computerbaserede interventioner beskrives som havende særlige fordele for elever, lærere og forskere:

- De muliggør reduceret træningstid og lærertilstedevær og muliggør individualiseret undervisning for den lærende.
- De muliggør en privat feedback, der kan være værdifuld for elever, der kæmper for at fortsætte og gentagne gange lider nederlag i normale klasseværelseskontekster (Butterworth & Laurillard, 2010).

I reviewet af Ok et al. (2020) skriver man: *“det overordende resultat viste en lovende effekt ved anvendelse af computerbaseret undervisning med elever i matematikvanskeligheder. Derudover rapporterer man, at der er tæt sammenhæng mellem, hvordan computerprogrammet har opbygget læringen og elevernes læringseffekt.*

Det blev også undersøgt, hvordan relationen direkte undervisning og brug af computerbaseret undervisning forholdt sig til hinanden. Resultatet viser, at det centrale er, hvordan man underviser og ikke hvilke ”devices” man bruger. Man fandt, at selv om eleverne var engagerede i at arbejde med computerprogrammet, så kunne ”det ikke slå interaktion med læreren”.

Lämsä et al. (2018) undersøgte mere generelt, hvorvidt brugen af digitale undervisningsspil kunne forbedre læse- og matematikfærdigheder hos elever i læringsvanskeligheder. Lämsä et al. understreger, at elevers aktivitet i undervisningsspil skal have et mentalt indhold, og de skal ikke kun være ”fysiske”. Det er vigtigt at indstille de fysiske krav som fx hurtighed, så kravene ikke begrænser elevernes muligheder for mental aktivitet. Spillene bør også indtænke muligheder for tilpasning og individualiseret feedback, så det understøtter læringen hos elever med vanskeligheder bedst muligt. Det har ifølge Lämsä et al. vist sig, at konteksten, fantasy-elementer og audio-visuelle aspekter har væsentlig betydning for børns engagement. Det samme gælder scoringssystem og umiddelbar feedback. Men det må afvejes, om engagementet er adfærdsmæssigt, kognitivt eller følelsesmæssigt. Følelsesmæssigt engagement uden kognitivt engagement giver ikke læring. Også den umiddelbare feedback må være direkte relevant for den intenderede læring.

Spotnitz (2001) undersøgte, hvordan computerbaseret undervisning på matematikområdet påvirkede den indre motivation, opgaveinvolvering, self-efficacy og læring hos elever, der var blevet diagnosticeret som indlæringsvanskeligheder i matematik. Eleverne blev præsenteret for computerspil i to ”rige” fantasy-sammenhænge. 83 elever i fjerde til sjette klasse deltog og deres forældre. Undersøgelsen viste signifikante positive effekter inden for områderne indre motivation (største forskel op mod kontrolgruppe), opgaveinvolvering og self-efficacy. Forventningen om, at forældre til børn i forsøgsgrupperne ville tro, at spillene var mere

effektive end resultaterne, blev også understøttet. Hvorvidt effekten på elevernes indlæring af matematiske færdigheder kan anses for signifikant, er et mere komplekst spørgsmål i fortolkningen af undersøgelsens resultater.

Andre repræsentationer

Et review fra Park (2022) peger på behovet for visuelle repræsentationer (tegninger, grafiske repræsentationer o.lign.) brugt intuitivt af lærere til at forklare og afklare problemer, og af elever til at forstå og forenkle problemer. Når det bruges systematisk, har det visuelle positive fordele for elevernes matematiske præstationer. Forskere har påvist, at en undervisningssekvens, der går fra konkret til repræsentativ/ikonisk til abstrakt, gavner elever med vanskeligheder i grundskoler og gymnasier (Bouck, 2018). Der refereres ofte til dette som en 'CRA-læringsstrategi' og i andre sammenhænge som 'CPA' (concrete – pictorial – abstract).

I reviewet fra Park påviser man en effekt af og potentialet i at manipulere med "konkreter" i en *virtuel* verden. Studier har vist, at interventioner med inddragelse af virtuelle manipulativer for læring af addition har en signifikant effekt for lavt præsterende elever. Der er dog studier, som viser elevers vanskeligheder ved at fastholde den umiddelbare læring knyttet til arbejdet med de virtuelle programmer. I seks ud af 19 studier målte man ikke, at læringen var fastholdt. I 12 ud af de 19 var der problemer med elevers generalisering af deres træning.

Peltier (2020) påviser, at der generelt er der meget forskning, som viser, at elever i aldersgruppen syv til 11 år får mere gavn af at bruge fysisk konkrete materialer (manipulativer) end elever på 12 år og ældre. Dette gælder ikke for elever i matematikvanskeligheder – der er ikke målt signifikant læringsforskel ved brugen af konkrete materialer i forskellige aldre. Det anbefales således generelt at inddrage konkrete materialer til elever med vanskeligheder i matematik. Det skal dog bemærkes, at der synes at være tendenser til, at elever med følelsesmæssige og adfærdsmæssige vanskeligheder har en svagere effekt ved brugen af konkrete materialer end elever i generelle og specifikke læringsvanskeligheder.

Et andet område, der blev undersøgt var, om konkrete materialer gav forskellig effekt afhængigt af, om elevernes arbejde blev vurderet baseret på deres matematiske proces (dvs. proces til at løse problemet) versus deres løsning alene (dvs. rigtigt/forkert). Resultater tyder på, at konkrete materialer var lige så effektive til at forbedre elevernes matematiske proces som deres løsning.

De samlede resultater tyder på, at brugen af konkrete materialer til matematikundervisning er vellykket på tværs af forskellige former for vanskeligheder. Den eneste advarsel er, at studerende, der er identificeret med en følelsesmæssig eller adfærdsmæssig lidelse, får færre fordele.

9. Overgangsproblemer

Vi vil her se på problematikker knyttet til overgangen fra dagtilbud til skole og fra skole ind i ungdomsuddannelserne. Hvis antagelsen om, at grundlæggende talfærdigheder og talforståelse er væsentlig svagere/anderledes hos elever med matematikvanskeligheder end hos elever med normal matematisk færdighed, er rigtig, bør man kunne finde disse kendetegn hos små børn i førskolealderen.

Ligeledes kan det være interessant, hvordan aftagerfeltet med ungdomsuddannelserne forholder sig til elever i matematikvanskeligheder.

Overgangen fra førskolealderen til folkeskolen

Mazzocco og Thompton (2005) undersøgte 226 førskolebørn i 4-årsalderen i et longitudinelt studium for efterfølgende at se på deres præstationer i 1. og 2. klasse. Resultatet af undersøgelsen var, at børn, som viste svage præstationer inden for tal i 4-årsalderen havde en forudsigelse på over 80% om hvorvidt de ville blive beskrevet som værende i i matematikvanskeligheder. Kendetegnene var færdigheder i at læse tal, mængdevurdering af et-cifrede antal og regning med et-cifrede tal.

Nelson & Powell har fokus på tidlige talfærdigheder og deres betydning i den videre læring. Det bemærkes, at elever, der scorede under 15. percentil på talviden og hovedregning i første klasse, havde haft væsentligt lavere tælleevner i børnehave (Desoete & Grégoire, 2006), og at elever med matematikvanskeligheder i første klasse havde sværere ved at genkende korrekt tælling eller genkendelse af tællefejl (Geary, 2007). Det er et generelt resultat ifølge Nelson & Powell, at tidlige talfærdigheder såsom optælling, navngivning af tal, rækkefølge og størrelsessammenligning, forudsiger matematikvanskeligheder senere. I vores vurdering er det interessant, at sådanne tidlige talfærdigheder typisk læres uformelt før skolestart eller tidligt i den (formelle) skolegang i børnehaveklassen, samtidig med at disse færdigheder er væsentligt relateret til brede matematikpræstationer til og med femte klasse.

I Stavanger-projektet (Reikerås, 2019) undersøgte man udviklingen i præstationsniveauet i matematik hos børn fra 2½ år til 10 år. Denne langtvarende forskning involverede ca. 700 børn, som blev fulgt fra at være "toddlers" til elever i folkeskolen. De blev målt på deres matematiske præstationsniveau ved brug af observationsskemaet MIO (Matematik - individ og omverden). Forskningen omhandlede bl.a. en sammenligning af præstationer fra en alder på ca. 33 mdr. og en tilsvarende 2 år efter (57 mdr.).

En del af sammenligningen vedrørte de 10% svagest præsterende børn. Ved den første måling udgjorde de 10% svagest præsterende ca. 75 børn, som var tydeligt svagere præsterende end den acceptable gruppe. Der viste sig dog, at ca. 3/4 af børnene havde

ændret status 2 år efter fra at være i den svagt præsterende gruppe til den acceptabelt præsterende gruppe.

Den største forskel mellem den svagt præsterende børnegruppe og den "normalt" præsterende gruppe var knyttet til antalsbestemmelse med brug af tal og tælling. Den mindste forskel var inden for former - rum og mønstre.

Resultaterne stiller spørgsmål ved, hvor tidligt man kan forudsige elevers vanskeligheder i matematik. Artiklen betoner dog behovet for tidlig intervention, hvis børnene har svært ved matematik.

Hannula et al. (2010) undersøgte børnehavebørns spontane anvendelse af tal og antal ved beskrivelse af billeder. Fænomenet omtales som SFON (spontaneous focus on numerosity). De påviste bl.a., at målingen var en signifikant prædiktør for aritmetiske færdigheder vurderet i slutningen af klasse 2.

Duncan et al. (2007) konkluderede, at børn, der starter i børnehaven med relativt lav matematikkunnen, også halter bagefter jævnaldrende, når de kommer i skole.

Overgangen til ungdomsuddannelserne

Det er evident, at der blandt danske unge er nogle, der ikke påbegynder en ungdomsuddannelse, nogle der ikke gennemfører en ungdomsuddannelse, og nogle der gennemfører med en lav præstation i matematik på ungdomsuddannelser. Vi formoder, at nogle i disse tre grupper unge befinder sig i den afgrænsning i forhold til matematikvanskeligheder, som er beskrevet tidligere i denne vidensopsamling.

Et perspektiv på disse unge har været at undersøge overgangsproblemer mellem grundskole og ungdomsuddannelser. Der er nogle få af disse undersøgelser i Danmark, samt indsatser til afhjælpning af problemerne.

For erhvervsskoleområdet blev der afholdt forsøgsundervisning 2012-2013 med 23 elever i matematikvanskeligheder. Der var tilknyttet samtidig og efterfølgende forskning (Lindenskov m.fl., 2014). Baggrunden for projektet var erfaringer med, at matematiklærere oplevede, at det var vanskeligt at motivere fagligt svagt funderede elever. Der viste sig positive resultater af forsøgsundervisningen.

Der har været større bevågenhed på gymnasieskolen som aftager af grundskolens elever, f.eks. i Afrapportering fra Matematikkommissionen (Undervisningsministeriet, UVM, 2016). I denne forbindelse kan nævnes udformning af to forsøgsvalgfag i grundskolen med navnet 'gymnasiematematik': dels 'Introducerende Gymnasiematematik' og dels 'Udfordrende Gymnasiematematik'. Fagene blev gennemført 2015-2020. Faget lå i sidste del af grundskolen, og undervisningen foregik med erfarne gymnasielærere og med en såkaldt mere gymnasial tilgang (Christensen,

2021; Krog, 2021). I faget blev der ikke undervist i de temaer, som er de væsentligste overgangsproblemer, men på mere abstrakte og symbolbaserede måder, end det foregår i grundskolen. Der var ifølge initiativtagernes egen beskrivelse tale om et andet sprog, et højere tempo, og en forventning om mere uddybende og præcise forklaringer: *"Dermed fik valgfagseleverne automatisk en forsmag på hvad der ventede i gymnasiet"* (Christensen, 2021, s. 19).

Silkeborg Gymnasium har i en årrække med et elevspørgeskema undersøgt, hvor stor en andel af 1.g-eleverne, der oplevede, at overgangen fra grundskole til gymnasium er ekstra svær i matematik, hvad der syntes svært, og hvordan oplevelsen af udfordringer hang sammen med elevernes matematikniveau i grundskolen

Efter gymnasireformen, hvor der blev lagt større vægt på matematik end tidligere, justerede Silkeborg Gymnasium kun lidt i matematikundervisningen i de første 3-4 måneder af gymnasieforløbet, men det ændrede ikke på elevernes svar på spørgeskemaet. Deltagere på forsøgsvalgfaget og effekten af forsøgsvalgfaget er også belyst gennem den gentagne spørgeskemaundersøgelse og ved karakterer: *"Blandt de 67 respondenter der har haft valgfaget gymnasimatematik, fik 17 % karakteren 4 eller 7 i grundskolen i skriftlig matematik med hjælpemidler, mens det for den samlede population på Silkeborg Gymnasium er 30 %. Det betyder, at gruppen af valgfagselever er lidt dygtigere end gennemsnittet, hvilket også kommer til udtryk ved at andelen af eleverne med karakteren 12 i grundskolen er højere end for den samlede population, nemlig 50 % sammenlignet med 29 %."* (Christensen, 2021, s. 13).

Spørgeskemasvar i 2015 blandt gymnasieelever uden deltagelse i "gymnasimatematik"-faget viste, at eleverne på en skole svarede korrekt på 25% af de stillede matematikspørgsmål, og på en anden skole var det på 40% af spørgsmålene. Forskellen mellem de to skoler afspejler rekrutteringsgrundlaget.

Spørgeskemasvar fra 2016-testen blandt gymnasieelever med deltagelse i "gymnasimatematik"-faget viste, at de rigtige elevsvar på den ene skole var vokset med 8,3 procentpoint, og på den anden skole vokset med 13 procentpoint. På den anden skole er denne stigning signifikant, men ikke på den første skole.

I et tidligere overgangsprojekt om progression i matematik og naturvidenskab fra grundskole til gymnasium (STX) (Lindenskov m.fl., 2009) undersøgte brugen af faglige og studiemæssige forudsætninger i overgangen mellem grundskole og gymnasium i relation til matematik og naturvidenskab. Der blev udpeget opmærksomhedspunkter for grundskole og gymnasium samt forslag til, hvordan gymnasiet i højere grad drager nytte af elevernes forudsætninger og kvalificerer elevens motivation og læring inden for undervisning og uddannelse med matematik og naturfag.

Finske forskere (Hakkarainen, 2016) har undersøgt ca. 600 unge mennesker, som havde læse-, matematik-, socioemotionelle eller adfærdsmæssige vanskeligheder i en alder af 16 år (niende klasse). De blev undersøgt i de efterfølgende fem år for, hvordan de klarede sig. Resultaterne viste, at matematiske og læsevanskeligheder samt socioemotionelle og adfærdsmæssige problemer havde betydelige langsigtede effekter på deltagernes uddannelseskarriere. Nyt var til dels, at disse indlæringsvanskeligheder syntes at have noget divergerende vægt på de tre undersøgte livssituationer:

- (1) Matematiske vanskeligheder, stærkere end læsevanskeligheder, fik eleverne til at opnå lavere uddannelsesniveauer.
- (2) Matematiske vanskeligheder og socioemotionelle problemer forudsagde, at en elev havnede i gruppen med personer, som ikke var i uddannelse, ikke havde job og ikke var i lære (training).
- (3) Læsevanskeligheder og adfærdsproblemer forudsagde forsinket dimission fra ungdomsuddannelserne.

10. Specialskoler – specialundervisning

Ændringen af specialundervisningsbegrebet i 2012 medførte, at støtte til elever med særlige behov med et ressourceforbrug på under ni ugentlige timer fik betegnelsen 'supplerende undervisning' eller 'anden faglig støtte'. En sådan støtte kræver ikke nødvendigvis en pædagogisk psykologisk vurdering, og støtten er ikke nødvendigvis rettet mod en bestemt elev, men kan dække grupper af elever eller klassen som helhed.

Nationalt Center for Skoleforskning foretog i 2015/16 (Egelund, 2017) en undersøgelse af specialundervisning i tretten kommuner, som omfattede knap 70.000 elever svarende til ca. 10% af eleverne i den danske folkeskole. Undersøgelsen viste, at elevgruppen med supplerende undervisning var lidt større end den gruppe, der tidligere fik specialundervisning som støtte til almenundervisningen. Et andet vigtigt resultat var, at elever med støtte trivedes dårligere og især havde meget lavere tilpasning til skolens normer, selvkontrol, motivation og arbejdsindsats samt skolefaglige præstationer end elever uden støtte. Endelig havde deres forældre en svagere uddannelsesmæssig baggrund, og de følte sig i mindre grad i stand til at hjælpe deres børn.

Den supplerende undervisning var mindst i børnehaveklasse/1.klasse ca. 7%, mens den var størst på mellemtrinnet (3.-5. klasse) med ca. 13%. I undersøgelsen kategoriserede man forskellige typer af vanskeligheder herunder specifikke og generelle læringsvanskeligheder. Andelen af generelle, specifikke vanskeligheder og andre vanskeligheder (her indgik ADHD, adfærdsvanskeligheder mm.) i de tre specialundervisningsformer fremgår af nedenstående skema. Der er ikke i rapporten udspecificeret f.eks. læsevanskeligheder og matematikvanskeligheder.

Vanskelighed	Suppl. undervisning	Specialklasse	Specialskole
Generelle vanskeligheder	21%	10%	3%
Specifikke vanskeligheder	19%	33%	44%
Andre vanskeligheder	60%	57%	53%

Gruppen af elever med specifikke indlæringsvanskeligheder og generelle indlæringsvanskeligheder havde en overvægt af drenge på henholdsvis 67% og 62%.

I skoleåret 2015/16 var der ca. 11%, som modtog supplerende undervisning eller anden faglig støtte. Undersøgelsen pegede på, at lærerne på mellemtrin og overbygning havde den subjektive vurdering, at der var 8% af det samlede elevtal i almenklasser, der havde støttebehov, men som *ikke* fik støtte, og det tyder på, at 11% plus 8%, dvs. i alt 19% af almenkolernes elever har støttebehov.

I den opgørelse fra Danmarks Statistik fra 2022 er ca. 6% af eleverne fra grundskolen knyttet til segregeret specialundervisning (specialskoler, specialklasser mm.).

11. Litteraturliste

- Arbejderbevægelsens Erhvervsråd (2018). *Hver sjette elev opnår ikke 2 i dansk og matematik i 9. klasse.*
- Arbejderbevægelsens Erhvervsråd (2021). *Unge uden uddannelse – Psykisk sygdom og dårlige karakterer spænder ben for unges uddannelse.*
- Arbejderbevægelsens Erhvervsråd (2022). *Trods fremgang: Hver ottende afgangselev får stadig ikke 2 i dansk og matematik.*
- Arcara, G., Mondini, S., Bisso, A. et al. (2017). The Relationship between Cognitive Reserve and Math Abilities. *Frontiers in Aging Neuroscience*, 22. Section Neurocognitive Aging and Behavior, 9.
- Ashcraft, M.H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current directions in psychological science*, 181-185.
- Ashcraft, m.h. & Krause, J.A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomoc Bulletin & Review* 14 (2), 243-248.
- Ashkenazi, S., Mark-Zigdon, N., & Henik, A. (2013). Do subitizing deficits in developmental dyscalculia involve pattern recognition weakness? *Developmental Science*, 16 (1), 35-46.
- Baker, D. L., Richards-Tutor, C., Sparks, A., & Canges, R. (2018). Review of single subject research examining the effectiveness of interventions for at-risk English learners. *Learning Disabilities Research & Practice*, 33(2), 64-74.
- Baker, S., Gersten, R., & Lee, D.-S. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students. *The Elementary School Journal*, 103(1), 51-73.
- Bandura, A. (1994). Self-efficacy. In V. S. Ramachaudran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (Vol. 4, pp. 71-81). New York: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], *Encyclopedia of mental health*. San Diego: Academic Press, 1998).
- Baten, E., Vansteenkiste, M., De Muynck, G.-J., De Poortere, E., & Desoete, A. (2020). How Can the Blow of Math Difficulty on Elementary School Children's Motivational, Cognitive, and Affective Experiences Be Dampened? The Critical Role of Autonomy-Supportive Instructions. *Journal of educational psychology*, 112(8), 1490-1505.
- Baxter, J., Woodward, J., & Olson, D. (2005). Writing in mathematics: An alternative form of communication for academically low-achieving students. *Learning Disabilities Research & Practice*, 20, 119-135.
- BBC, A. Bernhard (2018). *Why can't we just let our mobiles and tablets take the strain when it comes to numbers?* 9. juli.
- Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., Levine, S. C., & Smith, E. E. (2010). Female Teachers' Math Anxiety Affects Girls' Math Achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(5), 1860-1863.
- Benavides-Varela, S.; Zandonella Callegger, C.; Fagiolini, B.; Leo, I.;Altoè, G.; Lucangeli, D. (2020). Effectiveness of digital-based interventions for children with mathematical learning difficulties: A meta-analysis *Computers & Education* 11, 157.
- Berninger, V.W & Dunn, M. (2021). Brain and Behavioral Response to Intervention for Specific Reading, Writing, and Mathematics Disabilities: What Works for Whom? I:

- M. Danesi (Ed.). *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer Nature.
- Bishara, S. (2022) Linking cognitive load, mindfulness, and self-efficacy in college students with and without learning disabilities, *European Journal of Special Needs Education*, 37:3, 494-510.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math*. San Francisco, CA: Jossey-Bass & Pfeiffer Imprints.
- Boaler, J., & LaMar, T. (2019). *Valuing Difference and Growth: A Youcubed Perspective on Special Education*.
- Boaler, J, & Staples, M. (2008). Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School. *Teachers College record*, 110(3), 608–645.
- Boaler, Jo. (2019). *Everyone Can Learn Mathematics to High Levels: The Evidence from Neuroscience that Should Change our Teaching* Title.
- Boets, B., & De Smedt, B. (2010). Single-digit arithmetic in children with dyslexia. *Dyslexia*, 16 (2), 183–191.
- Bouck, E.C. & Park, J. (2018) A Systematic Review of the Literature on Mathematics Manipulatives to Support Students with Disabilities. *Education and Treatment of Children*. Vol. 41, 1, 65-106.
- Butterworth, B., & Laurillard, D. (2010). Low numeracy and dyscalculia: Identification and intervention. *ZDM Mathematics Education*, 42, 527–539.
- Butler, F. M., Miller, S. P., Lee, K., & Pierce, T. (2001). Teaching mathematics to students with mild-to-moderate mental retardation: A review of the literature. *Mental Retardation*, 39(1), 20–31.
- Carey, E., Devine, A., Hill, F., Dowker, A., McLellan, R., & Szucs, D. (2019). *Understanding Mathematics Anxiety: Investigating the experiences of UK primary and secondary school students*. Apollo - University of Cambridge Repository.
- Cawley, J. F., Fitzmaurice, A. M., Shaw, R., Kahn, H., & Bates Herman. (1979). LD Youth and Mathematics: A Review of Characteristics. *Learning Disability Quarterly*, 2(1), 29–44.
- Cezarotto, M. A., & Battaiola, A. L. (2016). *Game design recommendations focusing on children with developmental dyscalculia*. In International conference on learning and collaboration technologies (pp. 463–473). Springer.
- Choe, K. W., Jenifer, J. B., Rozek, C. S., Berman, M. G., & Beilock, S. L. (2019). Calculated Avoidance: Math Anxiety Predicts Math Avoidance in Effort Based-Decision Making. *Grantee Submission*, 5(11).
- Chodura, S., Kuhn, J.-T., & Holling, H. (2015). Interventions for children with mathematical difficulties. *Zeitschrift fur Psychologie*, 223, 129–144.
- Christensen, B. (2021). Overgangsproblemer i matematik. *MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik*, 2021(2).
- Daucourt, M,C;; Napoli, A.R.; Quinn, J.M. et al. (2021). The home math environment and math achievement: A meta-analysis. *Psychological Bulletin* 147 (6), 565-596.
- Desoete, A., & Grégoire, J. (2006). Numerical competence in young children and in children with mathematics learning disabilities. *Learning and Individual Differences*, 16, 351–367.

- De Visscher, A., & Noël, M. P. (2014a). Arithmetic facts storage deficit: The hypothesis of hypersensitivity-to-interference in memory. *Developmental Science*, 17 (3), 434–442.
- DeSimone, J., & Parmar, R. (2006). Issues and challenges for middle school mathematics teachers in inclusion classrooms. *School Science and Mathematics*, 106, 338–348.
- Dessemontet, R.; Sermier, B.G.; Morin, D. (2012). Effects of inclusion on the academic achievement and adaptive behaviour of children with intellectual disabilities. *Journal of intellectual disability*, 56 (6), 579-587-
- Donlan, C., Cowan, R., Newton, E. J., & Lloyd, D. (2007). The role of language in mathematical development: Evidence from children with specific language impairments. *Cognition*, 103 (1), 23–33.
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., et al. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43, 1428–1446.
- Durkin, K., Mok, P. L. H., & Conti-Ramsden, G. (2013). Severity of specific language impairment predicts delayed development in number skills. *Frontiers in Psychology* 4, article 581, 1–10.
- Dweck, C. S. (1986). Motivational processes affecting learning. *American Psychologist*, 41(10), 1040–1048.
- Egelund N., Nordahl T., Hansen O., Andersen P. G. og Qvortrup, L. (2017). *Portræt af elever med særlige behov (2017). Supplerende undervisning og specialundervisning i 13 kommuner*. Aarhus Universitetsforlag Nationalt Center for Skoleforskning
- Eccles, J. S., & Jacobs, J. E. (1986). Social Forces Shape Math Attitudes and Performance. *Signs*, 11(2), 367–380.
- Engström, A. (2000). Specialpedagogik för 2000-talet. *Nämrvaren* (1), 26-31.
- Engström, A., & Magne, O. (2003). *Medelsta-matematik : Hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94?* Rapporter från Pedagogiska institutionen, Örebro universitet NV - 1650-0652. Pedagogiska institutionen.
- Engström, A. (2003). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik - En introduktion*. Örebro: Pedagogiska institutionen, Örebro universitet,
- Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013). Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2 (2), 43–47.
- Faragher, R., Beswick, K., Cuskelly, M., & Nankervis, K. (2019). The Affective Impact of Inclusive Secondary Mathematics for Learners with Down Syndrome: “I Just Love It!” I: *Mathematics Education Research Group of Australasia* (30-J). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Faragher, R., Brady, J., Clarke, B., & Gervasoni, A. (2008). Children with Down Syndrome Learning Mathematics: Can They Do It? Yes They Can! *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(4), 10–15.
- Fletcher, J. M., & Grigorenko, E. L. (2017). Neuropsychology of learning disabilities: The past and the future. *Journal of the International Neuropsychological Society*, 23(9–10), 930–940.

- Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013). Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2 (2), 43–47.
- Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2013). Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 10, 29–44.
- Fritz, A.; Haase, V.G.; Räsänen, P. (2019). Introduction, 1-8. In: A. Fritz; V.G.Haase; P. Räsänen, P. (Eds.). *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties From the Laboratory to the Classroom*. Springer.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child development*, 78 (4), 1343-1359.
- Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202–1242.
- Gervasoni, A.; Lindenskov, L. (2011). *Students with 'Special Rights' for Mathematics Education*. In B. Atweh (Ed): *Quality and Equity in Mathematics Education*, 307-324. Springer Verlag.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A “Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 116–140. National Council of Teachers of Mathematics.
- Green, C. T., Bunge, S. A., Chiongbian, V. B., Barrow, M., & Ferrer, E. (2017). Fluid reasoning predicts future mathematical performance among children and adolescents. *Journal of Experimental Child Psychology*, 157, 125–143.
- Gross-Tsur, V., Manor, O., & Shalev, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 38(1), 25–33.
- Hakkarainen, A. M., Holopainen, L. K., & Savolainen, H. K. (2016). The impact of learning difficulties and socioemotional and behavioural problems on transition to postsecondary education or work life in Finland: A five-year follow-up study. *European Journal of Special Needs Education*, 31(2), 171–186.
- Hannula M.M., Lepola, J., Lehtinen, E. (2010) Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal for Exeptional Child Psychology*, 107(4):394-406.
- Harder, J., Færch, J. V., Malm, S. G., Overgaard, S., Rasmussen, K., Tonnesen, P., Rosholm, M. (2020). *Sammenfatning af følgeforskningen på Matematikindsats 2017 – TMTM, Tidlig matematikindsats til marginalgruppeelever*. Trygfondens Børneforskningscenter, Aarhus Universitet, Københavns Professionshøjskole.
- Harris. K.R.; Graham, S. (1999). Programmatic intervention research: illustrations from the evolution of self-regulated strategy development. *Learning Disability Quarterly*, 22, 251-262.
- Harris. K.R.; Graham, S. ; Mason, L.H. (2006). Improving the Writing, Knowledge, and Motivation of Struggling Young Writers: Effects of Self-Regulated Strategy Development With and Without Peer Support. *American Educational Research Journal* 43 (2) 295-340.

- Hattie, J. (2009). *Visible Learning - A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. Routledge.
- Hecht, S. A., Torgesen, J. K., Wagner, R. K., & Rashotte, C. A. (2001). The relations between phonological processing abilities and emerging individual differences in mathematical computation skills: A longitudinal study from second to fifth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79 (2), 192–227
- Hellstrand, H., Korhonen, J., Linnanmäki, K., & Aunio, P. (2020). The Number Race – computer-assisted intervention for mathematically low-performing first graders. *European journal of special needs education*, 35(1), 85–99.
- Heyder, A., Weidinger, A. F., Cimpian, A., & Steinmayr, R. (2020). Teachers’ belief that math requires innate ability predicts lower intrinsic motivation among low-achieving students. *Learning and Instruction*, 65.
- Holmes, V. M., & McGregor, J. (2007). Rote memory and arithmetic fact processing. *Memory and Cognition*, 35 (8), 2041–2051.
- Horváth, A., Baïdak, N., Motiejunaite-Schulmeister, A., & Noorani, S. (2022). Increasing Achievement and Motivation in Mathematics and Science Learning in Schools. Eurydice Report. I *European Education and Culture Executive Agency, European Commission*. European Education and Culture Executive Agency.
- Houten, R.V. (1993). Rote vs. rules: A comparison of two teaching and correction strategies for teaching basic subtraction facts. *Education and Treatment of Children*, 147-159
- Hwang, J., & Riccomini, P. J. (2016). Enhancing mathematical problem solving for secondary students with or at risk of learning disabilities: A literature review. *Learning Disabilities Research & Practice*, 31(3), 169–181.
- Jankvist U.T, Niss M. (2015) A framework for designing a research-based “maths counsellor” teacher programme. *Educational Studies in Mathematics*. 90 :259–284.
- Jankvist U.T, Niss M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51 (4).
- Jitendra, A. K., Lein, A. E., Im, S.-h., Alghamdi, A. A., Hefte, S. B., & Mouanoutoua, J. (2018). Mathematical interventions for secondary students with learning disabilities and mathematics difficulties: A meta-analysis. *Exceptional Children*, 84, 177–196.
- Kadosh, R. C., Dowker, A., Heine, A., Kaufmann, L., & Kucian, K. (2013). Interventions for improving numerical abilities: Present and future. *Trends in neuroscience and education*, 2(2), 85-93.
- Klapp, A., Cliffordson, C., & Gustafsson, J.-E. (2016). The effect of being graded on later achievement: evidence from 13-year olds in Swedish compulsory school. *Educational psychology*, 36(10), 1771–1789.
- Krajewski, K., & Schnieder, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual-spatial working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103 (4), 516–531.
- Kratochwill, T., Hitchcock, J., Horner, R., Levin, J., Odom, S., Rindskopf, et al. (originally published 2009). *Single-case intervention research design standards*. Findings of the

National Single-Case Design Panel based on the What Works Clearinghouse's Single-case designs technical documentation produced by the current authors.

- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education, 24*, 97–114.
- Krog, B. (2021). Lad os gøre overgangsproblemer i matematik til et overgangsfænomen!. *MONA - Matematik- Og Naturfagsdidaktik, 21*(4).
- Kucian, K., vonAster, M. (2014), Developmental dyscalculia, *European Journal of Pediatrics 174*(1)
- Kunsch, C. A., Jitendra, A. K., & Sood, S. (2007). The Effects of Peer-Mediated Instruction in Mathematics for Students with Learning Problems: A Research Synthesis. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1), 1–12.
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition, 93* (2), 99–125.
- Lämsä, J., Härmäläinen, R., Aro, M., Koskimaa, R., & Äyrämö, S. (2018). Games for enhancing basic reading and maths skills: A systematic review of educational game design in supporting learning by people with learning disabilities. *British Journal of Educational Technology, 49*(4), 596–607.
- Levine, E.; Gupte, S.; Singh, UK et al. (1992). 18 Mathematical Disabilities: Developmental Aspects. *Advances in Pediatrics Special Volume 19*.
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*, 215–243
- Lindenskov, L. & P. Weng (2006). Matematikvanskeligheder og regnehuller? *MONA. Matematik- og Naturfagsdidaktik - tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere, 2*, 90-93.
- Lindenskov, L., Kirsted, K., Allerup, P. & Lindhardt, B. (2018). *Talblindhedsprojektet. Rapport om udvikling af talblindhedstest og vejledningsmateriale*. Faglig rapport fra Danmarks institut for Pædagogik og Uddannelse og Professionshøjskolen Absalon
- Linnanmäki, K. (2007). Matematikprestationer, självuppfatning och attribution. I: L. Østergaard Johansen (Red.), *Mathematics teaching and inclusion : proceedings of the 3rd Nordic research conference on special needs education in mathematics* (s. 209–218). Department of Admission Courses, Aalborg University.
- Lunde, O. (2012). *Når tal går kaotisk : specialpædagogisk fokus på matematikvanskeligheder* (1. udgave). Special-pædagogisk Forlag.
- Maccini, P.; Mulcany, C.A.; Wilson, M.G. (2007). A Follow-Up of Mathematics Interventions for Secondary Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities research & practice 22* (1), 58-74.
- McKenna, J.W.,; Shin, M.; Ciullo, S. (2015). Evaluating reading and mathematics instruction for students with learning disabilities: A synthesis of observation research. *Learning Disability quarterly 38* (4), 195-207.
- Maguire, E. A., Gadian, D. G., Johnsrude, I. S., Good, C. D., Ashburner, J., & Frith, C. D. (2000). Navigation-Related Structural Change in the Hippocampi of Taxi Drivers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 97*(8), 4398–4403.
- Maloney, E. A., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2015). Intergenerational Effects of Parents' Math Anxiety on Children's Math Achievement

- and Anxiety. *Psychological Science*, 26(9), 1480–1488.
- Mammarella, I. C., Giofrè, D., Ferrara, R., & Cornoldi, C. (2013). Intuitive geometry and visuospatial working memory in children showing symptoms of nonverbal learning disabilities. *Child Neuropsychology: a Journal on Normal and Abnormal Development in Childhood and Adolescence*, 19 (3), 235–249.
- Mastropieri, M. A., Scruggs, T. E., Hauth, C., & Allen-Bronaugh, D. (2012). Instructional interventions for students with mathematics learning disabilities. I B. Wong & D. L. Butler (Red.), *Learning about learning disabilities.*, 4th ed. (s. 217–241). Elsevier Academic Press.
- Mazzocco M., R. Thompson. (2005): Kindergarten Predictors of Math Learning Disability. *Psychology Learning disabilities research & practice* : a publication of the Division for Learning Disabilities, Council for Exceptional Children
- Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011a). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PLOS ONE*, 6 (9), e23749.
- Monei, T., & Pedro, A. (2017). A systematic review of interventions for children presenting with dyscalculia in primary schools. *Educational Psychology in Practice*, 33(3), 277–293.
- Montague, M. & Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly* 23 (Summer), 215-227.
- Morsanyi, K., van Bers, B. M. C. W., McCormack, T., & McGourty, J. (2018). The prevalence of specific learning disorder in mathematics and comorbidity with other developmental disorders in primary school-age children. *British Journal of Psychology*, 109(4), 917–940.
- Morsanyi, K., Devine, A., Nobes, A., & Szucs, D. (2013). The link between logic, mathematics and imagination: Evidence from children with developmental dyscalculia and mathematically gifted children. *Developmental Science*, 16 (4), 542–553.
- Murphy, S. (2022). Mathematics success against the odds: the case of a lowsocioeconomic status, rural Australian school with sustained high mathematics performance. *Mathematics Education Research Journal* 34, 767–787.
- Myklebust, H. R. (1975). Nonverbal learning disabilities: Assessment and intervention. In H. R. Myklebust (Ed.), *Progress in learning disabilities* (Vol. III., pp. 85–121). New York: Grune & Stratton.
- Nelson, G., & Powell, S. R. (2018). A systematic review of longitudinal studies of mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 51(6), 523–539.
- Niss, M. A., & Jankvist, U. T. (Eds.) (2017). *Læringsvanskeligheder i matematik - hvordan kan de forstås og afhjælpes?* Frydenlund.
- Noël, M. P., & Rousselle, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: An explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience*, 5, 165.
- OECD (2004). *Learning for Tomorrow's World - First Results from PISA 2003*. PISA, OECD Publishing.

- OECD (2013). *PISA 2012 Results: Ready to Learn – Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs (Volume III)*. PISA, OECD Publishing.
- Ostad, S. A. (2007). Dysmatematikk: Et multifaktorelt fenomen med karakteristiske kjennetegn = Math difficulties: A multifactorial phenomenon with characteristic features. *Psykologisk Paedagogisk Rådgivning*, 44(4), 294–304.
- Park, J. Bryant, D. P.; Shin, M. (20229). . Effects of interventions using virtual manipulatives for students with learning disabilities: A synthesis of single-case research *Journal of Learning Disabilities* 55(4):325-337
- Patton, J. R., Cronin, M. E., Bassett, D. S., & Koppel, A. E. (1997). A life skills approach to mathematics instruction : Preparing students with learning disabilities for the real-life math demands of adulthood : Special series-Part I. Mathematics education and students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, 30(2), 178–187.
- Peltier, C.; Morin, K. L.; Bouck, E. C.; Lingo, M. E.; Pulos, J.M.; Scheffler, F, A.; Suk, A.; Mathews, Leslie A.; Sinclair, Tracy E.; Deardorff, Malarie E. (2020). A meta-analysis of single-case research using mathematics manipulatives with students at risk or identified with a disability. *The Journal of Special Education*;54(1):3-15. Sage Publications.
- SFI – Det Nationale Forskningscenter for Velfærd (2013). *PIAAC: Færdigheder i læsning, regning og problemløsning med it i Danmark*.
- Pintrich, P R (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning, *International Journal of Educational Research*, Volume 31, Issue 6, 459-470,
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition* , 116 (1), 33–41.
- Powell, S.E.; Fuchs, L.S:- Fuchs, D; Cirino, P.T; Fletcher, j.M. (2009). Effects of Fact Retrieval Tutoring on Third-Grade Students with Math Difficulties with and without Reading Difficulties. *Learning disabilities- Research and Practice*. 24, 1-11.
- Powell, S.R.; Fuchs, L.S.; Fuch, D. (2010). Embedding Number-Combinations Practice Within Word-Problem Tutoring. *Intervention in School and Clinic* 46(1) 22–30 © Hammill Institute on Disabilities.
- Powell, S. R., Nelson, G., & Peng, P. (2017). Mathematics trajectories from preschool to postsecondary: The predictive nature of mathematics performance. *Journal for Learning Disabilities*. *Learn Disabilities* 51 (6), 523-539
- Powell, S. R., Doabler, C. T., Akinola, O. A., Therrien, W. J., Maddox, S. A., & Hess, K. E. (2020). A synthesis of elementary mathematics interventions: Comparisons of students with mathematics difficulty with and without comorbid reading difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 53(4), 244–276.
- Powell, S. R., Mason, E. N., Bos, S. E., Hirt, S., Ketterlin-Geller, L. R., & Lembke, E. S. (2021). A systematic review of mathematics interventions for middle-school students experiencing mathematics difficulty. *Learning Disabilities Research and Practice*, 36(4), 295–329.
- Price, G. R., & Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, Causes, and Treatments. *Numeracy*, 6(1), 2.

- Prior, M.; Smart, D.; Sanson, A., Oberklaid, F. (1999). Relationships Between Learning Difficulties and Psychological Problems in Preadolescent Children From a Longitudinal Sample. *Journal of the American Academy of Child & Adolescent Psychiatry*, 38 (4), 429-436.
- Raghubar, K. P., Barnes, M. A., & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 110–122.
- Ramaa, S.; Gowramma, I.P. (2002). A systematic procedure for identifying and classifying children with Dyscalculia among primary school children in India. *Dyslexia - An international journal of research and practice* 8 (2), 67-85.
- Ramirez, G., & Beilock, S. L. (2011). Writing About Testing Worries Boosts Exam Performance in the Classroom. *Science*, 331(6014), 211–213.
- Rasanen, P., Salminen, J., Wilson, A. J., Aunio, P., & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, 24, 450–472.
- Reikerås, E., Løge, I. K., & Knivsberg, A. (2012). The mathematical competencies of toddlers expressed in their play and daily life activities in Norwegian kindergartens. *International Journal of Early Childhood*, 44(1), 91–144.
- Reusser, k. (2000). Success and failure in school mathematics: effects of instruction and school environment. *European Child & Adolescent Psychiatry* 9: II, 17–26.
- Ritchie, S.J. & Bates, T.C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological Science*, 23(7):1301-1308.
- Rivera-Batiz, F.L. (1992). Quantitative Literacy and the Likelihood of Employment among Young Adults in the United States. *The Journal of Human Resources* 27, (2), 313-328. Published By: University of Wisconsin Press
- Rollins, L. M. (2008). The influence of full inclusion on academics and self-concepts of students with learning disabilities [ProQuest Information & Learning]. I *Dissertation Abstracts International Section A: Humanities and Social Sciences* (Bd. 68, Numre 7-A).
- Rosdahl, A. m. fl. (2013). *Færdigheder i læsning, regning og problemløsning med IT i Danmark*. SFI - Det Nationale Forskningscenter for Velfærd.
- Rosholm, M.; Paul, A.; Bleses, D. et al. (2021). Are impacts of early interventions in the scandinavian welfare state consistent with a heckman curve? A meta-analysis. *Journal of Economic Surveys* 35 (1), 106-140.
- Rubinstein; O.; Henik, A. (2009). Dyscalculia: heterogeneity might not mean different mechanisms. *Trends Cognition Science* 13(2):92-9
- Røsseland, M. (2011). *“Jeg gidder ikke bry meg mer!”: en studie av hva åtte ungdomsskoleelever mener påvirker deres læring i matematikk*. Masteroppgåve i yrkesretta spesialpedagogik, Volda.
- Shalev, R.S.; Auerbach, J., Gross-Tsur, V. (1995). Developmental Dyscalculia Behavioral and Attentional Aspects: A Research Note. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 36 (7), 1261-1268.
- Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Opitz, E. M. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support

- practice? *ZDM: Mathematics Education*, 48(5), 633–649.
- Schoenfeld, A.H. (2022). Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult? In: M. Danesi (Ed.) *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer Nature.
- Semenza, C.; Meneghello, F.; Arcara, G.; Burgio, F.; Gnoato, F. Facchini, S.; Benavides-Varela, S.; Clementi, M.; Butterworth, B. (2014). A new clinical tool for assessing numerical abilities in neurological diseases: numerical activities of daily living. *Frontiers in Aging Neuroscience, Section Neurocognitive Aging and Behavior*, 6.
- Seo, Y. J., & Bryant, D. P. (2009). Analysis of studies of the effects of computer-assisted instruction on the mathematics performance of students with learning disabilities. *Computers & Education*, 53, 913–928.
- Sermier Dessemontet, R., Bless, G., & Morin, D. (2012). Effects of inclusion on the academic achievement and adaptive behaviour of children with intellectual disabilities. *JIDR. Journal of intellectual disability research (Print)*, 56, 579–587.
- Shin, M., Bryant, D. P., Powell, S. R., Jung, P.-G., Ok, M. W., & Hou, F. (2021). A meta-analysis of single-case research on word-problem instruction for students with learning disabilities. *Remedial and Special Education*, 42(6), 398–411.
- Simmons, F. R., & Singleton, C. (2008). Do weak phonological representations impact on arithmetic development? A review of research into arithmetic and dyslexia. *Dyslexia*, 14 (2), 77–94.
- Schneider, M.; Beeres, K.; Coban, L. et al. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. *Developmental Science* 20 (3), e12372.
- Sortkær, B. (2007). Feedback i matematik - et litteraturstudie. I R.G. Henriksen (red). *Feedback i matematik*, s.9-20. Dafolo.
- Spotnitz, S. H. (2001). Intrinsic motivation in students with learning disabilities as examined through computer based instruction in mathematics. *Dissertation Abstracts International: Section B: The Sciences and Engineering* 08 62(2-B):1120-1120.
- Stein, P. A., & Hoover, J. H. (1989). Manifest anxiety in children with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 22(1), 66-66. Steinmayr, R., Spinath, B. (2009). The importance of motivation as a predictor of school achievement. *Learning and Individual Differences* 19, (1), 80-90
- Swanson, H. L., & Jerman, O. (2006). Math disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review of Educational Research*, 76 (2), 249–274
- Turner, J. C., Midgley, C., Meyer et al. (2002). The classroom environment and students' reports of avoidance strategies in mathematics: A multi-method study. *Journal of Educational Psychology*, 94, 88–106.
- van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39 (6), 496–506.
- von Aster, Michael G (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Dev Medical Children Neurology* 49(11):868-73.

- Vukovic, R. K., & Siegel, L. S. (2010). Academic and cognitive characteristics of persistent mathematics difficulty from first through fourth grade. *Learning Disabilities Research and Practice*, 25, 25–38.
- Wexler, J., Reed, D. K., Pyle, N., Mitchell, M., & Barton, E. E. (2015). A synthesis of peer-mediated academic interventions for secondary struggling learners. *Journal of Learning Disabilities*, 48(5), 451–470.
- Wilson, A. J., & Dehaene, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. In D. Coch, G. Dawson & K. W. Fischer (Eds.), *Human behavior, learning, and the developing brain: Atypical development* (pp. 212–238). New York: Guilford Press
- Wilson, A. J., Dehaene, S., Dubois, O., & Fayol, M. (2009). Effects of an Adaptive Game Intervention on Accessing Number Sense in Low-Socioeconomic-Status Kindergarten Children. *Mind Brain and education*, 3(4), 224–234.
- Wood, B. L., & Berry III, R. Q. (2015). Special Pi Day Ahead: 3.14.15. *Teaching Children Mathematics*, 21(7), 389–392.
- Woods, R.S. (2022). A meta-analysis on the effectiveness of learning technologies on K-12 students with dyscalculia. *Dissertation Abstracts International: Section B: The sciences and engineering* 83, 2-B.
- Woodward, J., & Ono, Y. (2004). Mathematics and Academic Diversity in Japan. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 74–82.
- Wilson, A. J., & Dehaene, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. In D. Coch, G. Dawson & K. W. Fischer (Eds.), *Human behavior, learning, and the developing brain: Atypical development* (pp. 212–238). New York: Guilford Press
- Zevenberger, R. (2000). "Cracking the Code" of mathematics classrooms: School success as a function of linguistic, social and cultural background, 201-224. In J.Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Ablex Publishing.
- Zimmerman, B. J., & Risemberg, R. (1997). Becoming a self-regulated writer: A social cognitive perspective. *Contemporary Educational Psychology*, 22(1), 73–101.